Université Pierre et Marie Curie **Année 2013-2014**
L3 - Mathématiques
Probabilités - LM390

Corrigé de la série d'exercices N° 1

Rappel:

- $C_n^k := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le nombre de choix **non ordonnés** de k éléments distincts pris parmi n.
- $A_n^k := \frac{n!}{(n-k)!}$ est le nombre de choix **ordonnés** de k éléments distincts pris parmi n.

Exercice 1
Il est clair que ces deux événements peuvent être tels que : $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$. Or, d'après une propriété bien connue des mesures de probabilité, nous avons :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\,.$$

La valeur minimale que peut prendre $\mathbb{P}(A \cap B)$ est donc : $1/2$. D'autre part, on a $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) = 3/4$.

Donnons un exemple. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. On considère la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$. Pour $A = B = \{1, 2, 3\}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{4}$: le maximum est atteint. Pour $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{2}$: le minimum est atteint.

Exercice 2
1) L'espace probabilisé associé à cette expérience peut s'écrire :

$$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_i = 1, \cdots, 10\}\,.$$

Le cardinal de l'ensemble Ω est : $\text{card}(\Omega) = 10^4$. La probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est la probabilité uniforme : $\forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/10^4$. La probabilité de tout élément A de $\mathcal{P}(\Omega)$ se calcule alors ainsi :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}\,.$$

2) a) Soit A_1 l'ensemble de tous les quadruplets dans un ordre strictement croissant. Alors le nombre d'éléments de A_1 est le nombre de combinaisons : C_{10}^4. On peut le montrer de 2 façons différentes:

- A_1 est en bijection avec l'ensemble des parties à 4 éléments pris parmi 10. En effet, chaque partie est associée de manière unique avec une suite croissante (il suffit d'arranger les éléments par ordre croissant)
- on peut aussi voir que le nombre de quadruplets (a_1, a_2, a_3, a_4) avec 4 éléments distincts pris parmi 10 est A_{10}^4, qu'on doit ensuite diviser par 4! pour ne compter que les quadruplets qui sont strictement croissants.

La probabilité d'obtenir quatre nombres dans un ordre strictement croissant est donc $\mathbb{P}(A_1) = C_{10}^4/10^4 = 0,021$.
b) Soit A_2 l'ensemble de tous les quadruplets dans un ordre croissant au sens large. Dans A_2, il y a 10 quadruplets de nombres tous identiques, $2 \times C_{10}^2$ quadruplets de nombres dont trois sont égaux, $3 \times C_{10}^3$ quadruplets de nombre dont deux sont égaux, C_{10}^2 quadruplets de nombres composés de deux couples de nombres identiques et C_{10}^4 quadruplets de nombres tous distincts. Soit $P(A_2) = (10 + 2 \times C_{10}^2 + 3 \times C_{10}^3 + C_{10}^2 + C_{10}^4)/10^4 = 0,0715$.

On peut aussi raisonner de la manière suivante : L'application $(a_1, a_2, a_3, a_4) \mapsto (a_1, a_2+1, a_3+2, a_4+3)$ est une bijection de A_2 sur l'ensemble $A_2' = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_1 < a_2 < a_3 < a_4,\ a_i = 1, \cdots, 13\}$. Le cardinal de A_2 est donc égal à celui de A_2', c'est à dire C_{13}^4.
c) Soit A_3 l'événement correspondant. Alors le cardinal du complémentaire A_3^c de A_3 est le nombre de quadruplets obtenus en réalisant cette expérience avec 9 nombres, c'est à dire $\mathrm{card}(A_3^c) = 9^4$. On a alors $\mathbb{P}(A_3) = 1 - \mathbb{P}(A_3^c) = 1 - (9/10)^4 = 0,3439$.

Exercice 3
1) L'espace probabilisé associé à cette expérience peut s'écrire :

$$\Omega = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) : a_i \in \{1, \cdots, N\}, a_i \neq a_i, \text{ si } i \neq j\}.$$

Le cardinal de cet ensemble est : card(Ω)=$A_N^n = N(N-1)\cdots(N-n+1)$. Celui-ci étant muni de la probabilité uniforme, on a pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}.$$

2) a) A_k s'écrit : $A_k = \{(a_1, \cdots, a_n) \in \Omega : a_k \in \{1, 2, \cdots, M\}\}$. On doit dénombrer A_k. On propose 2 solutions:
- l'application

$$\begin{array}{ccc} A_k & \longrightarrow & A_1 \\ (a_1, \cdots, a_k, \cdots, a_n) & \mapsto & (a_k, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_n) \end{array}$$

est une bijection de A_k dans A_1, d'où card(A_k)=card(A_1). Le cardinal de A_1 est : card(A_1)=$M(N-1)\cdots(N-n+1)$.
- On peut aussi dénombrer directement l'ensemble A_k. On a M choix pour la boule k. Une fois la boule k choisie, le nombre de choix pour les boules restantes est donné par le nombre de choix ordonnés de $n-1$ éléments distincts pris parmi $N-1$, à savoir A_{N-1}^{n-1}. On obtient card(A_k)=MA_{N-1}^{n-1}.

On a donc $\mathbb{P}(A_k) = M/N$. (Remarquons que la probabilité de l'événement A_k ne dépend pas de k et est égale à la proportion de boules rouges dans l'urne). On propose une autre solution pour calculer $\mathbb{P}(A_k)$. Notons X_k le numéro de la boule k. C'est donc une variable aléatoire. Par symétrie, on a $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = 2) = \ldots = \mathbb{P}(X_k = N)$, donc vu que $\sum_{i=1}^N \mathbb{P}(X_k = i) = 1$, on obtient que $\mathbb{P}(X_k = i) = \frac{1}{N}$ pour tout $i \leq n$. On remarque que $\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(X_k \leq M) = \sum_{i=1}^M \mathbb{P}(X_k = i) = \frac{M}{N}$.
b) Si $k = m$ alors $\mathbb{P}(A_k \cap A_m) = M/N$. Supposons que $k \neq m$. De même qu'à la question précédente, on peut établir une bijection entre $A_k \cap A_m$ et $A_1 \cap A_2$, d'où : $\mathbb{P}(A_k \cap A_m) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$. Enfin il est facile de voir que le cardinal de $A_1 \cap A_2$ est : card($A_1 \cap A_2$)=$M(M-1)(N-2)\cdots(N-n+1)$, soit $\mathbb{P}(A_k \cap A_m) = M(M-1)/[N(N-1)]$. On peut encore donner une autre solution: On a M choix pour la boule k puis $M-1$ choix pour la boule m. Une fois ces deux boules choisies, il s'agit de compter le nombre de choix ordonnésde $n-2$ éléments pris parmi $N-2$, donc card($A_k \cap A_m$)=$M(M-1)A_{N-2}^{n-2}$ puis $\mathbb{P}(A_k \cap A_m) = M(M-1)\frac{A_{N-2}^{n-2}}{A_N^n}$.

Exercice 4
1) L'espace probabilisé est le même qu'à l'exercice précédent avec $N = 20$.
2) L'événement $\{X = 8\}$ est égal à l'ensemble des triplets qui contiennent 8 et dont les deux autres nombres sont supérieurs à 8. Son cardinal est donc égal au nombre de couples de nombres distincts compris entre 9 et 20, c'est à dire A_{12}^2, multiplié par le nombre de manières d'intercaler le nombre 8 parmi ces deux nombres, c'est à dire 3. Enfin, on a $\mathbb{P}(X = 8) = 3A_{12}^2/A_{20}^3 = 11/190$.

L'événement $\{X \geq 8\}$ est égal à l'ensemble des triplets de nombres compris entre 8 et 20, c'est à dire A_{13}^3, et $\mathbb{P}(X \geq 8) = A_{13}^3/A_{20}^3 = 143/570$.
3) En généralisant le raisonnement fait à la question précédente, on obtient : card($\{X = k\}$)=nA_{20-k}^{n-1},

si $20-k+1 \geq n$ et 0 sinon. De même card($\{X \geq k\}$)=A^n_{20-k+1}, si $20-k+1 \geq n$ et 0 sinon. Enfin, on a $\mathbb{P}(X=k) = nA^{n-1}_{20-k}/A^n_{20}$, si $20-k+1 \geq n$ et 0 sinon et $\mathbb{P}(X \geq k) = A^n_{20-k+1}/A^n_{20}$, si $20-k+1 \geq n$ et 0 sinon.

Exercice 5

1) Il suffit de remarquer que $\omega \in \cap_{k=1}^n A_k$ si et seulement si $\omega \in A_k$ pour tout $k = 1, \cdots, n$, c'est à dire si et seulement si $\mathbb{1}_{A_k}(\omega) = 1$ pour tout $k = 1, \cdots, n$.

2) D'une part on a :

$$\mathbb{1}_{\cup_{k=1}^n A_k} = \mathbb{1}_{(\cap_{k=1}^n A_k^c)^c} = 1 - \mathbb{1}_{\cap_{k=1}^n A_k^c}.$$

D'autre part, d'après la relation établie en 1) :

$$\mathbb{1}_{\cap_{k=1}^n A_k^c} = \prod_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k^c}.$$

On conclut en appliquant l'identité $\mathbb{1}_{A_k^c} = 1 - \mathbb{1}_{A_k}$ une nouvelle fois.

3) Il suffit de développer le dernier terme de l'identité établie en 2), c'est à dire :

$$\prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_k}) = 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}}.$$

La formule du 3) vient alors de celle établie en 2) et de la linéarité de l'espérance. (Il faut aussi remarquer que que $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$ pour tout événement A.)

4) On numérote les factures et les boîtes aux lettres de 1 à n. Soit A_k l'évènement {la facture k est dans la boîte aux lettres k}. On cherche la probabilité de l'évènement $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Pour utiliser 3), il faut déterminer p_k. Soit $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. L'espace Ω est l'ensemble des configurations de n factures réparties dans n boîtes aux lettres. On a Card(Ω)=n!. L'évènement $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ est l'ensemble des configurations telles que la facture i_j est dans la boîte aux lettres i_j, pour $j = 1 \ldots k$. Comptons son cardinal. Pour chaque $j = 1 \ldots k$, on a un seul choix pour la boîte aux lettres i_j. Il reste ensuite à répartir $n-k$ factures dans $n-k$ boîtes aux lettres, ce qui donne $(n-k)!$ configurations possibles. Donc $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$. D'où $p_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = C_n^k (n-k)!/n! = 1/k!$, et $p(n) = \mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}/k!$, d'après la question précédente. Il découle du développement en série de l'exponentielle que la limite de $p(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ est $1 - 1/e$.

Exercice 6

L'espace probabilisé associé peut se représenter de la manière suivante :

$$\Omega = \{(a_1, \cdots, a_{10}) : a_i \in \{1, 2, 3\},\ i = 1, \cdots, 10\}.$$

Son cardinal est 3^{10}. Pour $k = 0, \cdots, 10$, le cardinal de l'événement $\{X = k\}$, est $C_{10}^{10-k} = C_{10}^k$ (nombre de manières de 'choisir' $10-k$ mauvaises réponses), multiplié par 2^{10-k} (2 choix possible à chaque fois). La loi de X est donc donnée par :

$$\mathbb{P}(X = k) = C_{10}^k \frac{2^{10-k}}{3^{10}}, \quad k = 0, 1, \cdots, 10.$$

X suit une loi binômiale de paramètres 10 et 1/3, que l'on note : $\mathcal{B}(10, 1/3)$. Une autre manière de déterminer la loi de X est d'exprimer cette v.a. comme la somme de 10 v.a. indépendantes prenant la valeur 0 avec probabilité 2/3 et la valeur 1 avec probabilité 1/3: X est le nombre de succès obtenus après 10 épreuves de Bernoulli indépendantes, où la probabilité de succès est 1/3. Il est connu alors que X suit une loi $\mathcal{B}(10, 1/3)$.

Exercice 7
De $\mathbb{P}(A) = 1/2$ et $\mathbb{P}(A \cap X) = 1/4$, on déduit que $\mathbb{P}(X) < 1$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X) &\geq \mathbb{P}(X \cap (A \cup B)) = \mathbb{P}(X \cap A) + \mathbb{P}(X \cap B) - \mathbb{P}(X \cap A \cap B) \\ &\geq \mathbb{P}(X \cap A) + \mathbb{P}(X \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 1/4 + 3/10 - 1/5 = 7/20 \\ &> 1/3\,. \end{aligned}$$

On a alors $1 < 1/\mathbb{P}(X) < 3$ et puisque $1/\mathbb{P}(X) \in \mathbb{N}$, on obtient finalement $\mathbb{P}(X) = 1/2$.

Exercice 8
On note S_i, l'événement : {tirer le sac S_i}, $i = 1, 2, 3$, A, l'événement : {tirer une pièce d'or} et B, l'événement : {tirer une pièce ordinaire}.
1) Soit Ω l'espace probabilisé, alors $\Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap (S_1 \cup S_2 \cup S_3)) \\ &= \mathbb{P}(A \cap S_1) + \mathbb{P}(A \cap S_2) + \mathbb{P}(A \cap S_3) \\ &= 1/3 \times 1 + 1/3 \times 0 + 1/3 \times 1/2 = 1/2\,. \end{aligned}$$

2) La probabilité que l'on cherche est $P(S_1 \,|\, A)$. Il est évident que $\mathbb{P}(A \,|\, S_1) = 1$, d'où :

$$\mathbb{P}(S_1 \,|\, A) = \mathbb{P}(A \,|\, S_1) \frac{\mathbb{P}(S_1)}{\mathbb{P}(A)} = 2/3\,.$$

Exercice 9
Soit A l'événement : {le document se trouve dans le septième tiroir}, et B l'événement : {le document se trouve dans l'un des six premiers tiroirs}. La probabilité que l'on cherche est $\mathbb{P}(A \,|\, B^c)$. D'une part, $\mathbb{P}(A) = p/7$, $\mathbb{P}(B) = 6p/7$ et d'autre part A est inclus dans B^c donc

$$\mathbb{P}(A \,|\, B^c) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B^c)}{\mathbb{P}(B^c)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{1 - \mathbb{P}(B)} = \frac{p}{7 - 6p}\,.$$

Exercice 10
L'événement $\{X = Y\}$ se décompose de la manière suivante : $\{X = Y\} = \cup_{k=1}^n \{X = k, Y = k\}$. De plus les événements $\{X = k, Y = k\}$, $k = 1, \cdots, n$ sont disjoints et pour tout k, $\{X = k\}$ et $\{Y = k\}$ sont indépendants. On a donc : $\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k) = 1/n$. L'espace probabilisé Ω se décompose ainsi : $\Omega = \{X > Y\} \cup \{X < Y\} \cup \{X = Y\}$. Par symétrie, on a $\mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{P}(X < Y)$, d'où l'équation : $2\mathbb{P}(X > Y) + \mathbb{P}(X = Y) = 1$. On en déduit que $\mathbb{P}(X > Y) = (n-1)/2n$ et $\mathbb{P}(X \geq Y) = \mathbb{P}(X > Y) + \mathbb{P}(X = Y) = 1/2 + 1/2n$. On aurait pu aussi calculer cette probabilité directement:

$$\mathbb{P}(X \geq Y) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(Y = i, X \geq i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(Y = i, X \geq i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(Y = i)\mathbb{P}(X \geq i)$$

par l'indépendance de X et Y. On calcule que $\mathbb{P}(X \geq i) = \sum_{j=i}^n \mathbb{P}(X = j) = \frac{(n-i+1)}{n}$. On obtient donc (en utilisant aussi $\mathbb{P}(Y = i) = 1/n$)

$$\mathbb{P}(X \geq Y) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(Y = i)\mathbb{P}(X \geq i) = \sum_{i=1}^n \frac{(n-i+1)}{n^2} = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

$X - Y$ est une v.a. symétrique à valeurs dans l'ensemble $\{-(n-1), -(n-2), \cdots, -1, 0, 1, \cdots, (n-2), (n-1)\}$. Pour déterminer sa loi, il suffit de calculer $\mathbb{P}(X - Y = k)$, pour $k = 0, 1, \cdots, n-1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X - Y = k) &= \sum_{i=1}^{n-k} \mathbb{P}(X = k + i, Y = i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-k} \mathbb{P}(X = k + i)\mathbb{P}(Y = i) \\ &= \frac{n-k}{n^2}\,, \end{aligned}$$

où la seconde égalité vient de l'indépendance entre X et Y.

Exercice 11
1) Calculons $\mathbb{P}(X=k)$. Il y a C_{1000}^k façons de pêcher k poissons parmi tous les poissons marqués. Puis il y a C_{N-1000}^{1000-k} façons de pêcher les autres. De plus il y a C_N^{1000} façons de pêcher 1000 poissons dans le lac. La loi de X est alors donnée par :

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{C_{1000}^k C_{N-1000}^{1000-k}}{C_N^{1000}}\,,\quad k=0,1,\cdots,1000\,.$$

X suit une loi hypergéométrique de paramètres N et 1000.
2) On obtient facilement l'égalité

$$\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)}=\frac{(1000-k)^2}{(k+1)(N-2000+k+1)}\,.$$

Ce quotient est décroissant en $k\in\{0,...,1000\}$. On obtient alors l'équivalence

$$\frac{\mathbb{P}(X=11)}{\mathbb{P}(X=10)}\leq 1\leq\frac{\mathbb{P}(X=10)}{\mathbb{P}(X=9)}\Leftrightarrow \mathbb{P}(X=10)\geq\mathbb{P}(X=k)\quad\forall k.$$

De plus $\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)}$ est décroissant en N. En résolvant $(1000-9)^2=(9+1)(x-2000+9+1)$ on obtient $x=100199,1$, puis $N=100200$.