Série d'exercices N°2

Exercice 1

Soit T une v.a. entière définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que T n'est pas égale à $+\infty$ presque sûrement, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T \geq n) > 0$ et que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T \geq n + p \,|\, T \geq n) = \mathbb{P}(T \geq p)$. Montrer que T suit une loi géométrique.

Exercice 2

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on se donne une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a. de Bernoulli de paramètre p, $(0 < p < 1)$, indépendantes.

1) Soit $A_n = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \neq X_{n-1}(\omega)\}$, $n \geq 2$. Calculer $\mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1})$ pour $n \geq 2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les A_n soient indépendants.

2) Soit $\nu(\omega) = \inf\{n \geq 2 : \omega \in A_n\}$, avec $\inf \emptyset = +\infty$. Montrer que ν est une v.a. Quelle est la loi de ν ? Montrer que $\mathbb{P}(\nu = +\infty) = 0$.

Exercice 3

On suppose données, sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ deux variables de Bernoulli ε_1 et ε_2, indépendantes, à valeurs dans $\{-1, +1\}$ avec

$$\mathbb{P}(\varepsilon_i = +1) = p, \qquad \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = 1 - p\,, \quad (i = 1,\ 2)\,.$$

1) Trouver p pour que la v.a. $\varepsilon_1\varepsilon_2$ soit indépendante d'une part de ε_1, et d'autre part de ε_2.

2) Trouver p pour que la v.a. $\varepsilon_1\varepsilon_2$ soit indépendante du couple $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Exercice 3-bis

Soient X, Y et Z trois v.a. discrètes. Vrai ou faux:

1) Si X et Y sont indépendantes, et si X et Z sont indépendantes, alors X est indépendante de (Y, Z).

2) Si (X, Y) et Z sont indépendantes, alors Y est indépendante de Z et X est indépendante de Z.

3) Si X et Y sont indépendantes et (X, Y) est indépendante de Z, alors X est indépendante de (Y, Z).

Exercice 4

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi définie par :

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p\,, \quad \mathbb{P}(X_n = 1) = p\,, \quad \text{avec } 0 < p < 1\,.$$

On pose

$$\begin{aligned} Y_n &= X_n X_{n+1} \\ S_n &= X_1 + \cdots + X_n \\ V_n &= Y_1 + \cdots + Y_n\,. \end{aligned}$$

1) Calculer $\mathbb{E}(S_n)$, $\mathbb{E}(V_n)$.

2) Calculer $\mathrm{Var}(S_n)$, $\mathrm{Var}(V_n)$ et $\mathrm{Cov}(S_n, V_n)$.

Exercice 5

On considère n variables indépendantes $X_1, \cdots, X_n$ à valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, \cdots, r\}$ et de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_1 = i) = p_i$, $1 \le i \le r$. On définit $Z_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_j = i\}}$.

1) Déterminer la loi de Z_1. A quelle condition les v.a. Z_i ont-elles même loi ?

2) Calculer la covariance de Z_1 et Z_2. Ces variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 6

Soient n et N des entiers supérieurs ou égaux à 2 et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et distribuées uniformément sur l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$, (i.e. $\mathbb{P}(X_i = k) = 1/N$ pour $k = 1, 2, \ldots, N$). On désigne par U_n leur minimum et par V_n leur maximum.

1) Calculer la loi de V_n.

2) Calculer la loi jointe de U_n et V_n puis $\mathbb{P}(U_n = V_n)$.

3) Calculer la probabilité pour que $X_1 = j$ et $X_2 = k$ sachant que $U_n = r$.

4) Trouver un équivalent lorsque N tend vers $+\infty$ (n fixé) de $E(V_n)$ et $Var(V_n)$.

Exercice 7

Soit $(X_n)_{n\ge 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi. On suppose que les (X_n) prennent des valeurs strictement positives. On pose $\mathbb{E}(X_k) = a$, $\mathbb{E}(X_k^{-1}) = b$, ($a < +\infty$ et $b < +\infty$) et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que $\mathbb{E}(S_n^{-1})$ est fini et que $\mathbb{E}(X_k S_n^{-1}) = n^{-1}$, pour $k = 1, \cdots, n$. Calculer $\mathbb{E}(S_m S_n^{-1})$, $n, m \ge 1$.

Exercice 8

Soient X et Y deux v.a. indépendantes. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, $(0 < p < 1)$ et Y suit une loi de Poisson de paramètre λ, $\lambda > 0$. Soit Z la v.a. égale à 0 si $X = 0$ et à Y si $X = 1$.

1) Calculer la loi de Z.

2) Quelle est la fonction génératrice de Z, son espérance et sa variance ?

3) Que vaut la probabilité conditionnelle de $X = 0$, respectivement, $X = 1$, sachant que $Z = 0$?

Exercice 9

Une secrétaire donne n appels téléphoniques ($n \geq 1$ est fixé). A chacun de ces appels, la probabilité qu'elle parvienne à joindre son correspondant est p ($p \in]0,1[$ est fixé). On suppose que les résultats de tous ces appels sont indépendants. Après cette première série d'essais, elle tente, le lendemain de rappeler les correspondants qu'elle n'a pas réussi à joindre. Les hypothèses sur ses chances de réussite sont les mêmes. On note X le nombre de personnes jointes dès le premier jour et Y le nombre de personnes jointes l'un ou l'autre jour.

1) Quelle est la loi de X ?

2) Pour $h \leq k \leq n$, que vaut $\mathbb{P}(Y = k|X = h)$?

3) En déduire la loi de Y. Retrouver ce résultat par un argument direct.

Exercice 9-bis

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$. On note $\mathcal{B}(n,p)$ la loi binomiale de paramètres n et p, (pour $n = 0$ c'est la loi de la v.a. identiquement nulle). Soit un entier $M \geq 1$, un réel $a \in]0,1[$ et U, V des v.a. à valeurs dans $\{0, 1, \cdots, M\}$ telles que :

· La loi de U sachant $V = r$ est identique à celle de $r + W$ où W suit une loi $\mathcal{B}(M - r, p)$.

· V suit une loi $\mathcal{B}(M, a)$

Prouver, en utilisant les fonctions génératrices puis par un calcul direct, que U suit une loi $\mathcal{B}(M, 1 - bq)$, avec $b = 1 - a$ et $q = 1 - p$.

Exercice 10

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes et ν une v.a. à valeurs entières indépendante de la suite (X_n). On définit S_ν sur Ω par $S_\nu(\omega) = 0$ si $\nu(\omega) = 0$ et $S_\nu(\omega) = \sum_{n=1}^{\nu(\omega)} X_n(\omega)$ si $\nu(\omega) \geq 1$.

1) Montrer que S_ν est une v.a.

2) On suppose que les X_n sont à valeurs entières et ont même loi. Déterminer la fonction génératrice de S_ν en fonction de celle de ν et de X_1.

3) En déduire l'espérance et la variance de S_ν.

4) Trouver la loi de S_ν lorsque les X_n suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et que ν suit une loi géométrique de paramètre $a \in]0,1[$.

Exercice 11

Une truite pond des oeufs au fond du torrent. Leur nombre N suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Chaque oeuf survit avec une probabilité $p \in]0,1[$, indépendamment des autres.

1) Soit M le nombre d'oeufs qui survivent. Donner la loi conjointe du couple (N, M). Donner la loi marginale et l'espérance de M.

2) M et $N - M$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 12

1) Rappeler l'inégalité de Markov.

2) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3) Soit Z une v.a. réelle, de carré intégrable. Montrer que pour tout évènement B,

$$\mathbb{E}[|Z|\mathbb{1}_B] \leq \mathbb{E}[Z^2]^{1/2}\mathbb{P}(B)^{1/2}.$$

Exercice 13

Soit Φ une fonction borélienne, strictement positive définie sur $]0,+\infty[$ et croissante. On suppose que $E(\Phi(|X|)) = M < +\infty$, où X est une variable aléatoire réelle presque sûrement non nulle. Montrer que

$$\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq \frac{M}{\Phi(t)}\,.$$

Exercice 14

Soit Z une v.a. réelle positive telle que $\mathbb{P}(Z > 0) > 0$. Montrer que pour tout $\theta \in [0,1]$,

$$\mathbb{P}(Z \geq \theta\mathbb{E}[Z]) \geq (1-\theta)^2\frac{\mathbb{E}[Z]^2}{\mathbb{E}[Z^2]}.$$

Exercice 15

Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \cdots$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(\varepsilon_n = +1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = 1/2\,.$$

1) Calculer en fonction de n la quantité:

$$\mathbb{E}((\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n)^2)\,.$$

2) Soit $a \in]0,1[$, fixé. Montrer l'inégalité:

$$\mathbb{P}(|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n| \geq an) \leq \frac{1}{a^2 n}\,. \tag{1}$$

3) Montrer que pour $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(|\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n| \geq an) = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{2^n} C_n^l \mathbb{1}_{|2l-n| \geq an}.$$

4) Déduire de 2) et de 3) que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \left(\sum_{l=0}^{n} C_n^l \mathbb{1}_{\{|2l-n| \geq an\}} \right) = 0\,.$$

5) Soit N une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\theta > 0$, indépendante de la suite $(\varepsilon_n, n \geq 1)$. Calculer

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{n=1}^{N+1} \varepsilon_n \right)^2 \right]$$

en fonction de θ.

Exercice 16

Soit $(Z_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par : $\mathbb{P}(Z_i = -1) = \mathbb{P}(Z_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(Z_i = 0) = 1 - 2p$ où p est tel que $0 < p < 1/2$.

1) On définit pour tout entier $i \geq 1$: $U_i = Z_i + Z_{i+1}$.

a) Déterminer la loi de U_i. Pour quels couples (i, j) les variables aléatoires U_i et U_j sont-elles indépendantes ?

b) Calculer pour $n \geq 2$, $Var(Z_1 + 2\sum_{i=2}^{n} Z_i + Z_{n+1})$.

c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{n} U_i \right| > \varepsilon \right) = 0\,.$$

2) Déterminer pour tout $i \geq 1$ la loi de X_i où $X_i = |Z_i|$. Les variables aléatoires $(X_i)_{i \geq 1}$ sont-elles indépendantes ?

3) On définit pour tout entier $n \geq 1$: $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

a) Déterminer la loi de S_n.

b) Déterminer la loi conditionnelle de S_n sachant $\{S_k = i\}$, $(k \neq n)$. On distinguera deux cas suivant que $n > k$ ou $n < k$.