Université Pierre et Marie Curie **Année 2013-2014**
L3 - Mathématiques Probabilités - LM390

Corrigé des exercices de la feuille d'exercices n°2

Exercice 1
Par définition de la probabilité conditionnelle, on a

$$\mathbb{P}(T \geq n+p \,|\, T \geq n) = \frac{\mathbb{P}(T \geq n+p, T \geq n)}{\mathbb{P}(T \geq n)} = \frac{\mathbb{P}(T \geq n+p)}{\mathbb{P}(T \geq n)}$$

car $\{T \geq n+p\} \subset \{T \geq n\}$. Par hypothèse, $\mathbb{P}(T \geq n+p \,|\, T \geq n) = \mathbb{P}(T \geq p)$, ce qui donne $\mathbb{P}(T \geq n+p) = \mathbb{P}(T \geq n)\mathbb{P}(T \geq p)$. Avec $p = 1$, on obtient que $\mathbb{P}(T \geq n+1) = \mathbb{P}(T \geq n)\mathbb{P}(T \geq 1)$. Posons $a = \mathbb{P}(T \geq 1)$. On trouve par récurrence que $\mathbb{P}(T \geq n) = a^n$. On vérifie que $a > 0$ car $\mathbb{P}(T \geq n) > 0$ par hypothèse. De plus, on remarque que $\{T \geq n\}$ sont des évènements décroissants en n et $\bigcap_{n\geq 1}\{T \geq n\} = \{T = \infty\}$. Par convergence monotone, on a $\mathbb{P}(T = \infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T \geq n)$. Comme $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$, on a nécessairement $a < 1$. La loi de T est alors donnée par $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T \geq n) - \mathbb{P}(T \geq n+1) = (1-a)a^n$, $n \geq 0$. T suit une loi géométrique de paramètre a.
La loi géométrique est dite sans mémoire. Supposons que T modélise le temps d'attente à un arrêt de bus . Sachant qu'on a attendu plus de n minutes, la probabilité d'attendre p minutes de plus ne dépend pas de n.

Exercice 2
L'intersection de A_n avec A_{n+1} se décompose ainsi :

$$\begin{aligned} A_n \cap A_{n+1} &= \{X_n \neq X_{n-1}\} \cap \{X_n \neq X_{n+1}\} \\ &= \{X_{n-1} = 0, X_n = 1, X_{n+1} = 0\} \cup \{X_{n-1} = 1, X_n = 0, X_{n+1} = 1\}, \end{aligned}$$

où les deux événements de la dernière égalité sont disjoints. Les v.a. X_n, $n \geq 1$ étant indépendantes, on a $P(A_n \cap A_{n+1}) = (1-p)^2 p + p^2(1-p) = p(1-p)$. Si les A_n, $n \geq 1$ sont indépendants, alors on a nécessairement $P(A_n \cap A_{n+1}) = P(A_n)P(A_{n+1})$. Avec

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P(X_n \neq X_{n-1}) \\ &= P(X_{n-1} = 0, X_n = 1) + P(X_{n-1} = 1, X_n = 0) \\ &= 2p(1-p), \end{aligned}$$

ceci entraîne que $p(1-p) = 4p^2(1-p)^2$, soit $p = 1/2$.

Montrons que cette condition est suffisante. Supposons donc $p = 1/2$ de sorte que $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/2$ et $\mathbb{P}(A_1) = 1/2$. On rappelle que des évènements $(A_i, i \in I)$ sont indépendants si et seulement si pour toute famille finie d'indices $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ de I, on a

$$\mathbb{P}(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k}) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_{n_i}).$$

On veut donc montrer que pour toute suite d'entiers $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k$,

$$\mathbb{P}(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k}) = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

On le montre par récurrence sur k. Si $k = 1$, l'identité est triviale car $\mathbb{P}(A_n) = 1/2$ pour tout n. Supposons que l'identité est vraie au rang k. Montrons qu'elle est vraie au rang $k+1$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_{k+1}}) &= \mathbb{P}(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k} \cap \{X_{n_{k+1}} \neq X_{n_{k+1}+1}\}) \qquad (1)\\
&= \mathbb{P}(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k} \cap \{X_{n_{k+1}} = 0\} \cap \{X_{n_{k+1}+1} = 1\})\\
&\quad + \mathbb{P}(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k} \cap \{X_{n_{k+1}} = 1\} \cap \{X_{n_{k+1}+1} = 0\}).
\end{aligned}$$

[**Notation**. On note $\sigma(Y)$ la tribu engendrée par la variable aléatoire Y.] Comme la suite $(X_\ell)_{\ell \geq 1}$ est indépendante, la tribu $\sigma(X_1, \ldots, X_{n_{k+1}})$ et la tribu $\sigma(X_{n_{k+1}+1})$ sont indépendantes (Ceci veut dire que tout évènement de la tribu $\sigma(X_1, \ldots, X_{n_{k+1}})$ et tout évènement de la tribu $\sigma(X_{n_{k+1}+1})$ sont indépendants). Or l'évènement $A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k} \cap \{X_{n_{k+1}} = 0\}$ appartient à $\sigma(X_1, \ldots, X_{n_{k+1}})$ tandis que $\{X_{n_{k+1}+1} = 1\} \in \sigma(X_{n_{k+1}+1})$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k} \cap \{X_{n_{k+1}} = 0\} \cap \{X_{n_{k+1}+1} = 1\}) &= \mathbb{P}(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k} \cap \{X_{n_{k+1}} = 0\})\mathbb{P}(X_{n_{k+1}+1} = 1)\\
&= \mathbb{P}(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k} \cap \{X_{n_{k+1}} = 0\})\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k} \cap \{X_{n_{k+1}} = 1\} \cap \{X_{n_{k+1}+1} = 0\}) &= \mathbb{P}(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k} \cap \{X_{n_{k+1}} = 1\})\mathbb{P}(X_{n_{k+1}+1} = 0)\\
&= \mathbb{P}(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k} \cap \{X_{n_{k+1}} = 1\})\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Donc, en revenant à (1), on obtient

$$\mathbb{P}(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_{k+1}}) = \left(\mathbb{P}(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k} \cap \{X_{n_{k+1}} = 0\}) + \mathbb{P}(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k} \cap \{X_{n_{k+1}} = 1\})\right)\frac{1}{2}.$$

On remarque que

$$\mathbb{P}(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k} \cap \{X_{n_{k+1}} = 0\}) + \mathbb{P}(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k} \cap \{X_{n_{k+1}} = 1\}) = \mathbb{P}(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k}).$$

Donc,

$$\mathbb{P}(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_{k+1}}) = \mathbb{P}(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k})\frac{1}{2}.$$

Il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence pour terminer la récurrence.
2) Pour tout $n \geq 2$, $\{\nu = n\} = \cap_{i=1}^{n-2}\{X_i = X_{i+1}\} \cap \{X_{n-1} \neq X_n\}$. Puisque les X_n sont des v.a., les ensembles $\{X_i = X_{i+1}\}$, $i \leq n$ et $\{X_{n-1} \neq X_n\}$ appartiennent tous à la tribu $\mathcal{F}$, c'est donc aussi le cas de $\{\nu = n\}$. Ceci montre que ν est une variable aléatoire.

Pour tout $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\nu = n) &= P(X_1 = X_2 \cdots = X_{n-1} = 1)\mathbb{P}(X_n = 0) + \\
&\quad \mathbb{P}(X_1 = X_2 \cdots = X_{n-1} = 0)\mathbb{P}(X_n = 1)\\
&= (1-p)^{n-1}p + p^{n-1}(1-p)\,,
\end{aligned}$$

ce qui caractérise la loi de ν. Calculons la probabilité de l'événement complémentaire : $\{\nu < +\infty\}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\nu < +\infty) &= \mathbb{P}(\cup_{n=2}^{\infty}\{\nu = n\}) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}((1-p)^{n-1}p + p^{n-1}(1-p)) \\
&= p\left(\frac{1}{1-(1-p)} - 1\right) + (1-p)\left(\frac{1}{1-p} - 1\right) \\
&= 1\,,
\end{aligned}$$

d'où $\mathbb{P}(\nu = +\infty) = 0$).

Exercice 3
1) Si $\varepsilon_1\varepsilon_2$ est indépendante de ε_1, on doit avoir en particulier $\mathbb{P}(\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1, \varepsilon_1 = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1)\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1)$. On remarque que $\{\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1, \varepsilon_1 = 1\} = \{\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1\}$ donc $\mathbb{P}(\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1, \varepsilon_1 = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1)\mathbb{P}(\varepsilon_2 = 1) = p^2$ car ε_1 et ε_2 sont supposées indépendantes. D'autre part, $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1) + \mathbb{P}(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1) = (1-p)^2 + p^2$. Cela implique que $p^2 = p(p^2 + (1-p)^2)$ donc $p \in \{0, 1/2, 1\}$. Réciproquement, vérifions que si $p \in \{0, 1/2, 1\}$, alors $\varepsilon_1\varepsilon_2$ est indépendante de ε_1, et $\varepsilon_1\varepsilon_2$ aussi indépendante de ε_2. Si $p \in \{0, 1\}$, c'est trivial car $\varepsilon_1\varepsilon_2$ est constant p.s., et une constante est indépendante de n'importe quelle autre variable aléatoire. Supposons donc que $p = 1/2$. On vérifie que $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = \eta) = \mathbb{P}(\varepsilon_2 = \eta) = \mathbb{P}(\varepsilon_1\varepsilon_2 = \eta) = 1/2$ pour $\eta = 1$ ou -1.On vérifie aussi que $\mathbb{P}(\varepsilon_1\varepsilon_2 = \eta_1, \varepsilon_1 = \eta_2) = 1/4$ pour $(\eta_1, \eta_2) = (1, 1); (1, -1); (-1, 1)$ ou $(-1; -1)$. Donc $\varepsilon_1\varepsilon_2$ est indépendante de ε_1. De même, $\varepsilon_1\varepsilon_2$ est indépendante de ε_2.
2) Si $\varepsilon_1\varepsilon_2$ est indépendante de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, alors en particulier $\varepsilon_1\varepsilon_2$ est indépendante de ε_1 et de ε_2, donc $p \in \{0, 1/2, 1\}$ d'après 1). Si $p \in \{0, 1\}$, alors $\varepsilon_1\varepsilon_2$ est constante donc indépendante de n'importe quelle v.a. Supposons maintenant $p = 1/2$. On remarque que $\mathbb{P}(\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1, (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (-1, 1)) = 0$. Or $\mathbb{P}(\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1) = 1/2$ et $\mathbb{P}((\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (-1, 1)) = 1/4$ et $\frac{1}{2}\frac{1}{4} \neq 0$ donc $\varepsilon_1\varepsilon_2$ n'est pas indépendante de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ dans ce cas. Ainsi, les seules solutions sont $p \in \{0, 1\}$.

Exercice 3-bis
1) FAUX: contre-exemple prendre $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ indépendantes telles que $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_2 = 1) = 1/2$ et $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_2 = -1) = 1/2$ puis poser $Y = \varepsilon_1$, $Z = \varepsilon_2$ et $X = \varepsilon_1\varepsilon_2$. D'après l'exercice 3, X et Y sont indépendantes, et X et Z sont indépendantes mais X et (Y, Z) ne sont pas indépendantes.
2) VRAI : En discutant sur toutes les valeurs y que peut prendre Y, on a $\mathbb{P}(X = x, Z = z) = \sum_y \mathbb{P}((X, Y) = (x, y), Z = z)$. Comme Z et (X, Y) sont indépendantes, on a $\mathbb{P}((X, Y) = (x, y), Z = z) = \mathbb{P}((X, Y) = (x, y))\mathbb{P}(Z = z)$ donc $\mathbb{P}(X = x, Z = z) = \sum_y \mathbb{P}((X, Y) = (x, y))\mathbb{P}(Z = z) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Z = z)$ car $\mathbb{P}(X = x) = \sum_y \mathbb{P}((X, Y) = (x, y))$.
3) VRAI: $\mathbb{P}(X = x, Y = y, Z = z) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)\mathbb{P}(Z = z)$ car Z indépendante de (X, Y). Puis, $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$ car X et Y sont indépendantes. Donc $\mathbb{P}(X = x, Y = y, Z = z) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)\mathbb{P}(Z = z) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y, Z = z)$ car Z est indépendante de (X, Y), donc en particulier Z est indépendante de Y.

Exercice 4 1) On a $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k \geq 0} k\mathbb{P}(X_n = k) = 0 \times \mathbb{P}(X_n = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X_n = 1) = p$. De plus, $\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(X_{n+1}) = p^2$ puisque X_n et X_{n+1} sont indépendantes. Donc, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = np$ et $\mathbb{E}(V_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Y_i] = np^2$. (On aurait aussi pu remarquer que S_n suit une loi binômiale de paramètres n et p donc $\mathbb{E}(S_n) = np$).

2) Puisque les v.a. $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont indépendantes et de même loi, on a $\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) = n\mathrm{Var}(X_1) = np(1-p)$. (*Si U et V sont indépendantes, alors* $\mathrm{Var}(U+V) = \mathrm{Var}(U) + \mathrm{Var}(V)$).

Les v.a. $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne sont pas indépendantes, mais on a

$$\mathrm{Var}(V_n) = \mathrm{Var}(Y_1 + \cdots + Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(Y_i) + 2 \sum_{1\le i<j\le n} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j).$$

Or $\mathrm{Var}(Y_i) = \mathbb{E}(Y_i^2) - \mathbb{E}(Y_i)^2 = \mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}(X_{i+1}^2) - p^4 = p^2 - p^4 = p^2(1-p^2)$ puisque X_i et X_{i+1} sont indépendantes. Si $j > i+1$, on a Y_i et Y_j qui sont indépendantes (en effet, on a alors (X_i, X_{i+1}) et (X_j, X_{j+1}) qui sont indépendantes donc X_iX_{i+1} et X_jX_{j+1} sont indépendantes). Ainsi, si $j > i+1$, $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$ (*si X et Y sont indépendantes alors* $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$*, mais la réciproque est fausse!*). Si $j = i+1$, on a

$$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = \mathbb{E}(X_iX_{i+1}^2X_{i+2}) - \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_{i+1}) = p^3 - p^4 = p^3(1-p).$$

Donc

$$\mathrm{Var}(V_n) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p) = p^2(1-p)(n+3np-2p).$$

Par bilinéarité de la covariance, on a $\mathrm{Cov}(S_n, V_n) = \sum_{1\le i,j\le n} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$. Or $\mathrm{Cov}(X_i, Y_j) = 0$ pour j différent de i et de $i-1$ (car dans ce cas X_i et Y_j sont indépendantes) et $\mathrm{Cov}(X_i, Y_i) = \mathbb{E}(X_i^2X_{i+1}) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(Y_i) = p^2(1-p)$ et $\mathrm{Cov}(X_i, Y_{i-1}) = \mathbb{E}(X_i^2X_{i-1}) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(Y_{i-1}) = p^2(1-p)$. Donc

$$\mathrm{Cov}(S_n, V_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, Y_i) + \sum_{i=2}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, Y_{i-1}) = (2n-1)p^2(1-p).$$

Exercice 5 1) La v.a. Z_1 est la somme des n v.a. indépendantes $1_{\{X_j=1\}}$ de loi de Bernoulli de paramètre p_1. D'après le cours, Z_1 suit donc une loi binomiale $B(n, p_1)$, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(Z_1 = k) = C_n^k p_1^k (1-p_1)^{n-k} \quad \text{pour } 0 \le k \le n.$$

De même Z_i suit la loi $B(n, p_i)$ et les v.a. Z_i $(1 \le i \le r)$ ont même loi si et seulement si $p_1 = p_2 = \cdots = p_r = \frac{1}{r}$.

2) **1ere solution** : On sait que $\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) = \mathbb{E}(Z_1Z_2) - \mathbb{E}(Z_1)\mathbb{E}(Z_2)$ et que $\mathbb{E}(Z_1) = np_1$, $\mathbb{E}(Z_2) = np_2$ (espérance de la loi binomiale). Il reste à calculer

$$\mathbb{E}(Z_1Z_2) = \mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^{n} 1_{\{X_j=1\}} \sum_{k=1}^{n} 1_{\{X_k=2\}}\Big) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(1_{\{X_j=1\}}1_{\{X_k=2\}}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_j = 1, X_k = 2).$$

Or, si $j = k$, on a $\mathbb{P}(X_j = 1, X_k = 2) = 0$ et si $j \ne k$, on a $\mathbb{P}(X_j = 1, X_k = 2) = p_1p_2$. Donc $\mathbb{E}(Z_1Z_2) = n(n-1)p_1p_2$ et $\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) = -np_1p_2$.

2e solution: On écrit par bilinéarité de la covariance

$$\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) = \sum_{1\le i,j\le n} \mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{\{X_i=1\}}, \mathbb{1}_{\{X_j=2\}}).$$

Si $i \ne j$, on a $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{\{X_i=1\}}, \mathbb{1}_{\{X_j=2\}}) = 0$ car X_i et X_j sont indépendantes. Il reste à calculer $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{\{X_i=1\}}, \mathbb{1}_{\{X_j=2\}})$ pour $i = j$. Par définition de la covariance, $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{\{X_i=1\}}, \mathbb{1}_{\{X_j=2\}}) =$

$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_i=1\}}\mathbb{1}_{\{X_j=2\}}] - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_i=1\}}]\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_j=2\}}]$. L'espérance d'une indicatrice d'un ensemble est la probabilité de cet ensemble, donc $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{\{X_i=1\}}, \mathbb{1}_{\{X_j=2\}}) = \mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 2) - \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(X_j = 2) = -p_1p_2$ si $i = j$. On obtient donc $\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) = -np_1p_2$.

Si $p_1 \neq 0$ et $p_2 \neq 0$, on a $\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) \neq 0$. Z_1 et Z_2 ne sont donc pas indépendantes. Si $p_1 = 0$ ou $p_2 = 0$, alors $Z_1 = 0$ p.s. ou $Z_2 = 0$ p.s. ce qui implique l'indépendance de Z_1 et Z_2.

Exercice 6 1) La fonction de répartition de V_n est

$$\mathbb{P}(V_n \leq k) = \mathbb{P}(X_1 \leq k, \dots, X_n \leq k) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq k) = \Big(\frac{k}{N}\Big)^n$$

par indépendance. On en déduit que

$$\mathbb{P}(V_n = k) = \mathbb{P}(V_n \leq k) - \mathbb{P}(V_n \leq k-1) = (\frac{k}{N})^n - (\frac{k-1}{N})^n \quad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq N.$$

2) Pour $1 \leq k \leq l \leq N$ on a

$$\mathbb{P}(U_n \geq k, V_n \leq l) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \{k \leq X_i \leq l\}\Big) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(k \leq X_i \leq n) = \frac{(l-k+1)^n}{N^n}$$

par indépendance. On obtient que, pour $k \leq \ell$,

$$\mathbb{P}(U_n = k, V_n \leq l) = \mathbb{P}(U_n \geq k, V_n \leq l) - \mathbb{P}(U_n \geq k+1, V_n \leq l) = \frac{(l-k+1)^n}{N^n} - \frac{(l-k)^n}{N^n}.$$

On remarque que

$$\mathbb{P}(U_n = k, V_n = l) = \mathbb{P}(U_n = k, V_n \leq l) - \mathbb{P}(U_n = k, V_n \leq l-1).$$

On obtient (il faut distinguer les cas $k \leq l-1$ et $k = l$)

$$\mathbb{P}(U_n = k, V_n = l) = \begin{cases} \dfrac{1}{N^n}\left[(l-k+1)^n - 2(l-k)^n + (l-k-1)^n\right] & \text{si } \ 1 \leq k < l \leq N \\ \dfrac{1}{N^n} & \text{si } \ k = l \end{cases}$$

On en déduit que $\mathbb{P}(U_n = V_n) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(U_n = k, V_n = k) = \frac{N}{N^n} = \frac{1}{N^{n-1}}$. On aurait pu le voir directement en remarquant que $\mathbb{P}(U_n = V_n = k) = \mathbb{P}(X_1 = \ldots = X_n = k) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = k) = (\frac{1}{N})^n$ par indépendance puis conclure comme avant en sommant sur k.

3) On a

$$\mathbb{P}(X_1 = j, X_2 = k \mid U_n = r) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = j, X_2 = k, U_n = r)}{\mathbb{P}(U_n = r)}.$$

Or on trouve de la même façon qu'en 1) que $\mathbb{P}(U_n = r) = \frac{1}{N^n}\left[(N-r+1)^n - (N-r)^n\right]$. Donc

- si $\min(j,k) < r$, $\mathbb{P}(X_1 = j, X_2 = k \mid U_n = r) = 0$;

- si $\min(j,k) = r$, on a $\mathbb{P}(X_1 = j, X_2 = k, U_n = r) = \mathbb{P}(X_1 = j, X_2 = k, X_i \geq r$ pour $i = 3 \dots n) = \mathbb{P}(X_1 = j)\mathbb{P}(X_2 = k)\prod_{\ell=3}^n \mathbb{P}(X_\ell \geq r)$ par indépendance, ce qui donne $\mathbb{P}(X_1 = j, X_2 = k, U_n = r) = \frac{1}{N^2}\left(\frac{N-r+1}{N}\right)^{n-2}$ et
$$\mathbb{P}(X_1 = j, X_2 = k \mid U_n = r) = \frac{(N-r+1)^{n-2}}{(N-r+1)^n - (N-r)^n} \ ;$$
- si $j > r$ et $k > r$, $\mathbb{P}(X_1 = j, X_2 = k, U_n = r) = \mathbb{P}(X_1 = j)\mathbb{P}(X_2 = k)\mathbb{P}(\min(X_3, \dots, X_n) = r)$ par indépendance. On remarque que $\mathbb{P}(\min(X_3, \dots, X_n) = r) = \mathbb{P}(U_{n-2} = r)$ donc on obtient $\mathbb{P}(X_1 = j, X_2 = k, U_n = r) = \dfrac{(N-r+1)^{n-2} - (N-r)^{n-2}}{N^n}$ et
$$\mathbb{P}(X_1 = j, X_2 = k \mid U_n = r) = \frac{(N-r+1)^{n-2} - (N-r)^{n-2}}{(N-r+1)^n - (N-r)^n} \ .$$

4) On a
$$\mathbb{E}(V_n) = \sum_{k=1}^N k\mathbb{P}(V_n = k) = \sum_{k=1}^N k\left((\frac{k}{N})^n - (\frac{k-1}{N})^n\right).$$
On peut montrer par un développement de Taylor que $(\frac{k}{N})^n - (\frac{k-1}{N})^n = \frac{1}{N}n(\frac{k}{N})^{n-1} + \varepsilon(k,N)$ avec $|\varepsilon(k,N)| \leq \frac{n(n-1)}{2N^2}$ (utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange par exemple). Donc
$$\mathbb{E}(V_n) = \sum_{k=1}^N \frac{k}{N}n(\frac{k}{N})^{n-1} + k\varepsilon(k,N) = \sum_{k=1}^N n(\frac{k}{N})^n + k\varepsilon(k,N).$$
On a $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N n(\frac{k}{N})^n \to \int_0^1 nx^n = \frac{n}{n+1}$ quand $N \to \infty$ (somme de Riemann). De plus, $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N k|\varepsilon(k,N)| \leq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N k\frac{n(n-1)}{2N^2}$ qui tend vers 0 quand $N \to \infty$. Donc
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\mathbb{E}(V_n) = \frac{n}{n+1}.$$
De même,
$$\mathbb{E}(V_n^2) = \sum_{k=1}^N k^2\left((\frac{k}{N})^n - (\frac{k-1}{N})^n\right) = \sum_{k=1}^N nk(\frac{k}{N})^n + k^2\varepsilon(k,N).$$
Comme avant, en utilisant les sommes de Riemann, on obtient
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2}\mathbb{E}(V_n^2) = \int_0^1 nx^{n+1} = \frac{n}{n+2}.$$
Donc, en utilisant que $\mathrm{Var}(V_n) = \mathbb{E}(V_n^2) - \mathbb{E}(V_n)^2$, on obtient
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2}\mathrm{Var}(V_n) = \frac{n}{n+2} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2.$$

Exercice 7 On a $0 < S_n^{-1} < X_k^{-1}$ pour tout k tel que $1 \leq k \leq n$, donc $0 \leq \mathbb{E}(S_n^{-1}) \leq b$, ce qui prouve que $\mathbb{E}(S_n^{-1})$ est fini.

Les nombres $\mathbb{E}(\frac{X_k}{S_n})$ sont tous égaux pour $1 \leq k \leq n$ car le couple (X_k, S_n) a même loi que le couple (X_l, S_n). De plus la somme de ces n nombres est égale à 1 puisque $\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\frac{X_k}{S_n}) = \mathbb{E}(\frac{S_n}{S_n}) = \mathbb{E}(1) = 1$. On en déduit que $\mathbb{E}(\frac{X_k}{S_n}) = \frac{1}{n}$ pour $1 \leq k \leq n$.

Il faut distinguer deux cas :

- si $m \leq n$ on a $\mathbb{E}(\frac{S_m}{S_n}) = \sum_{k=1}^m \mathbb{E}(\frac{X_k}{S_n}) = \frac{m}{n}$;
- si $m > n$ on a $\mathbb{E}(\frac{S_m}{S_n}) = 1 + \sum_{k=n+1}^m \mathbb{E}(\frac{X_k}{S_n})$. Or X_k et S_n sont des v.a. indépendantes pour $k > n$, donc $\mathbb{E}(\frac{X_k}{S_n}) = \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(S_n^{-1})$ et

$$\mathbb{E}\Big(\frac{S_m}{S_n}\Big) = 1 + (m-n)a\mathbb{E}(S_n^{-1}).$$

Exercice 8 1) On a $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z = k, X = 1) + \mathbb{P}(Z = k, X = 0) = \mathbb{P}(Y = k, X = 1) + \mathbb{P}(0 = k, X = 0)$. On en déduit que si $k \geq 1$, $\mathbb{P}(Z = k) = pe^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ et si $k = 0$, $\mathbb{P}(Z = 0) = 1 - p + pe^{-\lambda}$.

2) La fonction génératrice de Z est

$$G_Z(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(Z = k) = 1 - p + pe^{-\lambda} + pe^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda s)^k}{k!} = 1 - p + pe^{\lambda(s-1)}.$$

On peut obtenir les moments de Z à l'aide des dérivées de sa fonction génératrice : comme $G_Z(s) = \mathbb{E}(s^Z)$, on a $\mathbb{E}(Z) = G'_Z(1)$ et $\mathbb{E}(Z(Z-1)) = G''_z(1)$. On trouve $\mathbb{E}(Z) = \lambda p$ et $\mathbb{E}(Z(Z-1)) = \lambda^2 p$ puis on en déduit $\mathrm{Var}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \lambda p + \lambda^2 p - \lambda^2 p^2$.

3) On a

$$\mathbb{P}(X = 0 \mid Z = 0) = \frac{\mathbb{P}(X = 0, Z = 0)}{\mathbb{P}(Z = 0)} = \frac{\mathbb{P}(X = 0)}{\mathbb{P}(Z = 0)} = \frac{1-p}{1-p+pe^{-\lambda}}$$

et

$$\mathbb{P}(X = 1 \mid Z = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 0 \mid Z = 0) = \frac{pe^{-\lambda}}{1-p+pe^{-\lambda}}.$$

Exercice 9. 1) Chaque personne est jointe le premier jour avec probabilité p. Donc X est une binômiale $B(n,p)$ de paramètre n et p.
2) Sachant que $X = h$, il reste $n - h$ personnes à joindre le 2e jour. Chaque personne est jointe avec probabilité p le deuxème jour, donc le nombre de personnes jointes le 2e jour (qui est $Y - X$) suit une loi binômiale $B(n-h, p)$ de paramètre $n - h$ et p. Donc,

$$\mathbb{P}(Y = k \mid X = h) = \mathbb{P}(Y - X = k - h \mid X = h) = C_{n-h}^{k-h} p^{k-h}(1-p)^{n-k}.$$

3) On veut calculer $\mathbb{P}(Y = k)$. On discute selon les valeurs de X (on se restreint à $X \in \{0, \dots, k\}$ car on doit avoir $X \leq Y$)

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{h=0}^{k} \mathbb{P}(Y = k, X = h) = \sum_{h=0}^{k} \mathbb{P}(Y = k \mid X = h)\mathbb{P}(X = h).$$

On a $\mathbb{P}(X = h) = C_n^h p^h (1-p)^{n-h}$ donc

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{h=0}^{k} C_{n-h}^{k-h} p^{k-h}(1-p)^{n-k} C_n^h p^h (1-p)^{n-h} = p^k(1-p)^{2(n-k)} \sum_{h=0}^{k} C_{n-h}^{k-h} C_n^h (1-p)^{k-h}.$$

On remarque que

$$\sum_{h=0}^{k} C_{n-h}^{k-h} C_n^h (1-p)^{k-h} = \sum_{h=0}^{k} \frac{n!}{(n-k)!(k-h)!h!}(1-p)^{k-h} = C_n^k \sum_{h=0}^{k} C_k^h (1-p)^{k-h} = C_n^k (2-p)^k.$$

On a donc $\mathbb{P}(Y=k) = C_n^k \left(p(2-p)\right)^k (1-p)^{2(n-k)}$. Donc Y suit une loi binômiale $B(n, p(2-p))$de paramètres n et $p(2-p)$. On aurait pu le voir directement: chaque personne est jointe (le 1er ou 2e jour) avec probabilité $p + p(1-p)$. En effet, une personne est jointe le 1er jour avec probabilité p et le 2e jour avec probabilité $(1-p)p$. Y suit donc une binômiale de paramètres n et $p + (1-p)p = p(2-p)$.

Exercice 9-bis La fonction génératrice de U est $G_U(s) = \sum_{k=0}^{M} s^k \mathbb{P}(U=k)$. On écrit que

$$\mathbb{P}(U=k) = \sum_{r=0}^{M} \mathbb{P}(U=k, V=r) = \sum_{r=0}^{M} \mathbb{P}(U=k \mid V=r)\mathbb{P}(V=r)$$

donc

$$G_U(s) = \sum_{k=0}^{M} s^k \sum_{r=0}^{M} \mathbb{P}(U=k \mid V=r)\mathbb{P}(V=r)$$

Or $\mathbb{P}(U=k \mid V=r) = \mathbb{P}(W+r=k) = \mathbb{P}(W=k-r)$ et est donc égal à 0 pour $k-r<0$. D' où

$$G_U(s) = \sum_{k=0}^{M} s^k \sum_{r=0}^{k} \mathbb{P}(W=k-r)\mathbb{P}(V=r) = \sum_{r=0}^{M} \mathbb{P}(V=r) \sum_{k=r}^{M} s^k \mathbb{P}(W=k-r) = \sum_{r=0}^{M} \mathbb{P}(V=r) s^r G_W(s)$$

avec $G_W(s) = \mathbb{E}(s^W)$ la fonction génératrice de W. On sait que W suit une loi $B(M-r,p)$, et on calcule que $G_W(s) = (1-p+ps)^{M-r}$ (on peut le calculer directement, ou voir que $B(M-r,p)$ est une somme de $M-r$ Bernoulli indépendantes de paramètre p). Donc

$$G_U(s) = \sum_{r=0}^{M} \mathbb{P}(V=r) s^r (1-p+ps)^{M-r} = \sum_{r=0}^{M} C_M^r a^r (1-a)^{M-r} s^r (1-p+ps)^{M-r}$$

car V suit une loi $B(M,a)$. On a donc

$$G_U(s) = \left((1-a)(1-p) + (1-(1-a)(1-p))s\right)^M.$$

Donc U suit une loi $B(M, 1-(1-a)(1-p))$. Par un calcul direct, comme $\mathbb{P}(U=k \mid V=r) = \mathbb{P}(W=k-r) = C_{M-r}^{k-r} p^{k-r} (1-p)^{M-k}$ pour $r \le k \le M$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U=k) &= \textstyle\sum_{r=0}^{k} \mathbb{P}(U=k \mid V=r)\mathbb{P}(V=r) = \sum_{r=0}^{k} C_{M-r}^{k-r} p^{k-r} (1-p)^{M-k} C_M^r a^r (1-a)^{M-r} \\ &= C_M^k (1-(1-a)(1-p))^k ((1-a)(1-p))^{M-k}. \end{aligned}$$

Exercice 10 1) On a, pour tout borélien A de $\mathbf{R}$ les égalités suivantes :

$$\{\omega\,; S_\nu(\omega) \in A\} = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} \{\omega\,; \sum_{i=1}^{\nu(\omega)} X_i(\omega) \in A \text{ et } \nu(\omega)=k\} = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} \{\omega\,; \sum_{i=1}^{k} X_i(\omega) \in A \text{ et } \nu(\omega)=k\}.$$

Puisque ν et $\sum_{i=1}^k X_i$ sont des variables aléatoires, les événements $\{\sum_{i=1}^k X_i \in A\}$ et $\{\nu = k\}$ sont dans la tribu $\mathcal{F}$; leur intersection y est donc aussi et la réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{F}$. On en déduit que, pour tout borélien A de $\mathbf{R}$ l'événement $\{S_\nu \in A\}$ est dans $\mathcal{F}$, ce qui prouve que S_ν est une variable aléatoire.

2) Par définition, la fonction génératrice de S_ν est, pour $s \in [0,1]$,

$$G_{S_\nu}(s) = \mathbb{E}(s^{S_\nu})$$

On a $1 = \sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{\nu=k\}}$ donc

$$G_{S_\nu}(s) = \mathbb{E}(\sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{\nu=k\}} s^{S_\nu}) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\nu=k\}} s^{S_\nu}) = s^0 \mathbb{P}(\nu = 0) + \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\nu=k\}} s^{\sum_{i=1}^k X_i}).$$

Puisque ν et la suite (X_i) sont indépendantes, on a

$$G_{S_\nu}(s) = \mathbb{P}(\nu = 0) + \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}\left(s^{\sum_{i=1}^k X_i}\right) \mathbb{P}(\nu = k).$$

Enfin, puisque les X_i sont indépendantes et de même loi, on a

$$\mathbb{E}\left(s^{\sum_{i=1}^k X_i}\right) = \prod_{i=1}^k G_{X_i}(s) = (G_{X_1}(s))^k.$$

Ceci vaut 1 pour $k = 0$. Donc

$$G_{S_\nu}(s) = \sum_{k\geq 0} (G_{X_1}(s))^k \mathbb{P}(\nu = k) = G_\nu(G_{X_1}(s)) = G_\nu \circ G_{X_1}(s).$$

3) On a $G'_{S_\nu}(1) = \mathbb{E}(S_\nu)$ et $G''_{S_\nu}(1) = \mathbb{E}(S_\nu(S_\nu - 1))$. On déduit que $\mathbb{E}(S_\nu) = G'_{X_1}(1) G'_\nu(G_{X_1}(1)) = G'_{X_1}(1) G'_\nu(1) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(\nu)$. (on a utilisé que $G_Y(1) = 1$ pour toute fonction génératrice G_Y).
De même,

$$G''_{S_\nu}(1) = G'_\nu(G_{X_1}(1)) G''_{X_1}(1) + G''_\nu(G_{X_1}(1))(G'_{X_1}(1))^2 = \mathbb{E}(\nu)\mathbb{E}(X_1(X_1 - 1)) + \mathbb{E}(\nu(\nu-1))\mathbb{E}(X_1)^2.$$

On en déduit, puisque $\mathbb{E}(S_\nu) = \mathbb{E}(\nu)\mathbb{E}(X_1)$, que $\mathbb{E}(S_\nu^2) = \mathbb{E}(\nu)\mathbb{E}(X_1(X_1-1)) + \mathbb{E}(\nu^2)\mathbb{E}(X_1)^2$.
D'où

$$\mathrm{Var}(S_\nu) = \mathbb{E}(\nu)\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(\nu)\mathbb{E}(X_1)^2.$$

4) Si les X_n suivent une loi de Bernoulli de paramètre p, on a $G_{X_1}(s) = 1 - p + ps$. Si ν suit une loi géométrique de paramètre a, on a $G_\nu(s) = \frac{1-a}{1-as}$. Donc

$$G_{S_\nu}(s) = G_\nu \circ G_{X_1}(s) = \frac{1-a}{1 - a(1 - p + ps)} = \frac{\frac{1-a}{1-a(1-p)}}{1 - \frac{ap}{1-a(1-p)} s}.$$

On en déduit, puisque la fonction génératrice caractérise la loi, que S_ν suit une loi géométrique de paramètre $\frac{ap}{1-a(1-p)}$.

Exercice 11 1) On calcule $\mathbb{P}(N = n, M = m)$. Sachant $N = n$, M est la somme de n Bernoulli indépendantes de paramètre p (chaque oeuf survit avec probabilité p de façon indépendante), donc la loi de M sachant $N = n$ est $B(n,p)$. On a en particulier $\mathbb{P}(N = n, M = m) = 0$ si $m > n$. Si $m \leq n$, on obtient

$$\mathbb{P}(N = n, M = m) = \mathbb{P}(M = m \mid N = n)\mathbb{P}(N = n) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}\mathbb{P}(N = n).$$

N suit une loi de Poisson de paramètre a donc $\mathbb{P}(N = n) = e^{-a}\frac{a^n}{n!}$. D'où

$$\mathbb{P}(N = n, M = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} e^{-a}\frac{a^n}{n!} = e^{-a}\frac{a^n p^m (1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!}.$$

Pour calculer la loi de M, on somme sur toutes les valeurs que peut prendre N (on se restreint à $n \geq m$ car $\mathbb{P}(N = n, M = m) = 0$ si $n < m$):

$$\mathbb{P}(M = m) = \sum_{n\geq m}\mathbb{P}(M = m, N = n) = \sum_{n\geq m} e^{-a}\frac{a^n p^m (1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!} = e^{-a}\frac{(ap)^m}{m!}\sum_{k\geq 0}\frac{(a(1-p))^k}{k!}$$

en posant $k = n - m$. On trouve que $\mathbb{P}(M = m) = e^{-ap}\frac{(ap)^m}{m!}$ donc M suit une loi de Poisson de paramètre ap. On a $\mathbb{E}[M] = ap$ (l'espérance d'une loi de Poisson de paramètre λ est λ).
2) On a vu que

$$\mathbb{P}(N = n, M = m) = e^{-a}\frac{a^n p^m (1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!}.$$

On le réécrit

$$\mathbb{P}(N - M = \ell, M = m) = e^{-a(1-p)}\frac{(a(1-p))^\ell}{\ell!}e^{-ap}\frac{(ap)^m}{m!}.$$

Le couple $(N - M, M)$ a donc la loi d'un couple de deux variables indépendantes, de loi de Poisson de paramètres respectifs $a(1-p)$ et p. En particulier, M et $N-M$ sont indépendantes.

Exercice 12. 1) et 2) Cours.
3) On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\mathbb{E}(|Z|\mathbb{1}_B) \leq \mathbb{E}(Z^2)^{1/2}\mathbb{E}(\mathbb{1}_B)^{1/2} = \mathbb{E}(Z^2)^{1/2}\mathbb{P}(B)^{1/2}.$$

Exercice 13 D'après l'inégalité de Markov appliquée à la v.a. $\Phi(|X|)$, on a

$$\mathbb{P}(\Phi(|X|) \geq \Phi(t)) \leq \frac{M}{\Phi(t)}.$$

La fonction Φ étant croissante, on a $\{|X| \geq t\} \subset \{\Phi(|X|) \geq \Phi(t)\}$ donc $\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq \frac{M}{\Phi(t)}$.

Exercice 14. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cf question 3 de l'exercice 12), on a

$$\mathbb{E}(|Z|\mathbb{1}_{\{Z\geq\theta\mathbb{E}(Z)\}}) \leq \mathbb{E}(Z^2)^{1/2}\mathbb{P}(Z \geq \theta\mathbb{E}(Z))^{1/2}.$$

Comme Z est positive, on a $\mathbb{E}(|Z|\mathbb{1}_{\{Z\geq\theta\mathbb{E}(Z)\}}) = \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{\{Z\geq\theta\mathbb{E}(Z)\}})$. On remarque que

$$\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{\{Z\geq\theta\mathbb{E}(Z)\}}) = \mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{\{Z<\theta\mathbb{E}(Z)\}}).$$

Or, $Z\mathbb{1}_{\{Z<\theta\mathbb{E}(Z)\}} \leq \theta\mathbb{E}(Z)\mathbb{1}_{\{Z<\theta\mathbb{E}(Z)\}} \leq \theta\mathbb{E}(Z)$ car $\mathbb{E}(Z) > 0$. En passant à l'espérance des deux côtés de l'inégalité, on obtient que $\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{\{Z<\theta\mathbb{E}(Z)\}}) \leq \theta\mathbb{E}(Z)$. D'où

$$\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{\{Z\geq\theta\mathbb{E}(Z)\}}) \geq \mathbb{E}(Z) - \theta\mathbb{E}(Z) = (1-\theta)\mathbb{E}(Z).$$

On a donc que
$$(1-\theta)\mathbb{E}(Z) \leq \mathbb{E}(Z^2)^{1/2}\mathbb{P}(Z \geq \theta\mathbb{E}(Z))^{1/2}$$
ce qui permet facilement de conclure.

Exercice 15 1) On a $\mathbb{E}(\varepsilon_k) = 0$ et $\mathrm{Var}(\varepsilon_k) = 1$. D'après l'hypothèse d'indépendance, $\mathrm{Var}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n) = \mathrm{Var}(\varepsilon_1) + \cdots + \mathrm{Var}(\varepsilon_n) = n$ et $\mathbb{E}((\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)^2) = \mathrm{Var}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n) + [\mathbb{E}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)]^2 = n$.

2) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,
$$\mathbb{P}(|\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n| \geq an) \leq \frac{\mathrm{Var}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)}{a^2n^2} = \frac{1}{a^2n}.$$

3) Soit Y le nombre de $i \leq n$ tels que $\varepsilon_i = 1$. Alors il y a $n - Y$ indices $i \leq n$ tels que $\varepsilon_i = -1$. Donc $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = Y - (n - Y) = 2Y - n$. La v.a. Y suit une loi $B(n, 1/2)$ (c'est la somme de n Bernoulli indépendantes $\mathbb{1}_{\{\varepsilon_i = 1\}}$ de paramètre $1/2$). On obtient
$$\mathbb{P}(|\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n| \geq an) = \mathbb{P}(|2Y - n| \geq an) = \sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}(|2Y - n| \geq an, Y = \ell) = \sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}(|2\ell - n| \geq an, Y = \ell).$$
On remarque que $\mathbb{P}(|2\ell - n| \geq an, Y = \ell) = \mathbb{1}_{\{|2\ell - n| \geq an\}}\mathbb{P}(Y = \ell) = \mathbb{1}_{\{|2\ell - n| \geq an\}} C_n^\ell \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Finalement,
$$\mathbb{P}(|\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n| \geq an) = \sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{1}_{\{|2\ell - n| \geq an\}} C_n^\ell \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
4) On a d'après les deux questions précédentes, $\frac{1}{2^n}\sum_{l=0}^{n} C_n^l \, 1_{\{|2l-n| \geq an\}} \leq \frac{1}{a^2n}$.

5) Nous avons la décomposition suivant les valeurs de N (puisque $\sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{N=k\}}$):
$$\left(\sum_{n=1}^{N+1} \varepsilon_n\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{k+1} \varepsilon_n\Big)^2 1_{\{N=k\}}.$$
En prenant l'espérance de chacun des membres de cette équation, on obtient
$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{n=1}^{N+1} \varepsilon_n\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{k+1} \varepsilon_n\Big)^2 1_{\{N=k\}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\Big(\sum_{n=1}^{k+1} \varepsilon_n\Big)^2\right)\mathbb{P}(N = k)$$
d'après l'indépendance entre N et la suite (ε_n). D'après 1), on a donc
$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{n=1}^{N+1} \varepsilon_n\right)^2\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,\frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta} = 1 + \theta.$$

Exercice 16 1)

a) La v.a. $U_i = Z_i + Z_{i+1}$ peut prendre les valeurs -2, -1, 0, 1, 2 et on a en utilisant l'indépendance des v.a. Z_i
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U_i = 2) &= \mathbb{P}(Z_i = 1, Z_{i+1} = 1) = \mathbb{P}(Z_i = 1)\mathbb{P}(Z_{i+1} = 1) = p^2 \\
\mathbb{P}(U_i = 1) &= \mathbb{P}(Z_i = 1, Z_{i+1} = 0) + \mathbb{P}(Z_i = 0, Z_{i+1} = 1) = 2p(1-2p) \\
\mathbb{P}(U_i = 0) &= \mathbb{P}(Z_i = 1, Z_{i+1} = -1) + \mathbb{P}(Z_i = -1, Z_{i+1} = 1) + \mathbb{P}(Z_i = 0, Z_{i+1} = 0) \\
&= 2p^2 + (1-2p)^2
\end{aligned}$$

puis, la loi de Z_i étant symétrique par rapport à l'origine, $\mathbb{P}(U_i = -2) = p^2$, $\mathbb{P}(U_i = -1) = 2p(1-2p)$.

Si $|j-i| \geq 2$, les v.a. $U_i = Z_i + Z_{i+1}$ et $U_j = Z_j + Z_{j+1}$ étant fonction respectivement des couples (Z_i, Z_{i+1}) et (Z_j, Z_{j+1}) qui sont indépendants, sont indépendantes. Si $|j-i| = 1$, elles ne sont pas indépendantes puisque $\mathrm{Cov}(U_i, U_{i+1}) = \mathrm{Cov}(Z_i + Z_{i+1}, Z_{i+1} + Z_{i+2}) = \mathrm{Var}(Z_{i+1}) \neq 0$. b) Toujours grâce à l'indépendance des Z_i, on peut écrire

$$\mathrm{Var}\Big(Z_1 + 2\sum_{i=2}^{n} Z_i + Z_{n+1}\Big) = \mathrm{Var}(Z_1) + 4\sum_{i=2}^{n} \mathrm{Var}(Z_i) + \mathrm{Var}(Z_{n+1}).$$

Or $\mathbb{E}(Z_i) = 0$ et $\mathbb{E}(Z_i^2) = 2p$, donc $\mathrm{Var}(Z_i) = 2p$. On en déduit que

$$\mathrm{Var}\Big(Z_1 + 2\sum_{i=2}^{n} Z_i + Z_{n+1}\Big) = 2p[1 + 4(n-1) + 1] = 4p(2n-1).$$

c) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et la question b) permettent d'écrire

$$\mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\Big|\sum_{i=1}^{n} U_i\Big| > \varepsilon\Big) = \mathbb{P}\Big(\Big|\sum_{i=1}^{n} U_i\Big| > n\varepsilon\Big) \leq \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n} U_i) = \frac{4p(2n-1)}{n^2\varepsilon^2} \to 0$$

quand n tend vers l'infini.

2) On a $\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(Z_i = 0) = 1 - 2p$ et $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(Z_i = 1) + \mathbb{P}(Z_i = -1) = 2p$ donc X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $2p$. On a $X_i = f(Z_i)$ avec $f(x) = |x|$ donc les v.a. $(X_i)_{i\geq 1}$ sont indépendantes puisque les $(Z_i)_{i\geq 1}$ le sont.

3) a) D'après le cours S_n suit une loi binomiale de paramètres n et $2p$.

b)

- Si $k < n$ on a $S_n = S_k + X_{k+1} + \cdots + X_n$, donc

  $$\mathbb{P}(S_n = l \mid S_k = i) = P(X_{k+1} + \cdots + X_n = l - i \mid S_k = i) = \mathbb{P}(X_{k+1} + \cdots + X_n = l - i)$$

  puisque $X_{k+1} + \cdots + X_n$ et S_k sont indépendantes. Comme $X_{k+1} + \cdots + X_n$ suit la loi $B(n-k, 2p)$ on a donc pour $i \leq l \leq n$

  $$\mathbb{P}(S_n = l \mid S_k = i) = C_{n-k}^{l-i}(2p)^{l-i}(1-2p)^{n-k-l+i}.$$

- Si $k > n$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n = l \mid S_k = i) &= \frac{\mathbb{P}(S_n = l, S_k = i)}{\mathbb{P}(S_k = i)} = \frac{\mathbb{P}(S_n = l, X_{n+1} + \cdots + X_k = i - l)}{\mathbb{P}(S_k = i)} \\
&= \frac{C_n^l(2p)^l(1-2p)^{n-l}C_{k-n}^{i-l}(2p)^{i-l}(1-2p)^{k-n-k-i+l}}{C_k^i(2p)^i(1-2p)^{k-i}} \\
&= \frac{C_n^l C_{k-n}^{i-l}}{C_k^i}.
\end{aligned}$$