Corrigé des exercices de la feuille d'exercices n°3

Exercice 1

F est croissante continue à droite et ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement 0 et 1, c'est donc la fonction de répartition d'une loi de probabilité.

De plus comme F est nulle sur $\mathbf{R}_-$, continue en 0 et dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$, c'est la fonction de répartition d'une loi de densité $F'(x)1_{\mathbf{R}_+}(x)$, c'est-à-dire $\frac{x}{4}e^{-x/2}1_{\mathbf{R}_+}(x)$.

Exercice 2 :

$\forall t<0, \mathbb{P}(Y\le t)=0$, $\forall 0\le t<a, \mathbb{P}(Y\le t)=\mathbb{P}(X\le t)=t$, $\forall t\ge a, \mathbb{P}(Y\le t)=1$.

La fonction de répartition admet donc un point de discontinuité en a où elle "saute" de la valeur $1-a$ à la valeur 1. Soit $\mathbb{P}_Y$ la loi de Y ($\mathbb{P}_Y$ est donc une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}$). On veut écrire $\mathbb{P}_Y$ comme une combinaison linéaire d'une mesure à densité et d'une Dirac. On remarque que $\mathbb{P}_Y(]-\infty,t])=\mathbb{P}(Y\le t)$ par définition, et on vérifie que $\mathbb{P}(Y\le t)=aF_U(t)+(1-a)F_V(t)$ avec $F_U(t)=0$ si $t\le 0$, $F_U(t)=t/a$ si $t\in[0,a]$ et $F_U(t)=1$ si $t\ge a$, tandis que $F_V(t)=0$ si $t<a$ et $F_V(t)=1$ si $t\ge a$. On voit que F_U est la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0,a]$ et F_V est la fonction de répartition d'une mesure de Dirac en a. On le réécrit $\mathbb{P}_Y(]-\infty,t])=a\mathbb{P}_U(]-\infty,t])+(1-a)\mathbb{P}_V(]-\infty,t])$, où $\mathbb{P}_U$ est la mesure uniforme sur $[0,a]$ et $\mathbb{P}_V$ est la mesure de Dirac en a. Comme les intervalles $]-\infty,t]$ engendrent la tribu borélienne, on a $\mathbb{P}_Y=a\mathbb{P}_U+(1-a)\mathbb{P}_V$. La loi de Y (qui est $\mathbb{P}_Y$) est donc combinaison linéaire du Dirac en a et de la loi uniforme sur $[0,a]$, affectés respectivement des poids $1-a$ et a.

Exercice 3 :

1 - $\forall t<0, \mathbb{P}(X^2\le t)=0$, $\forall t\ge 0$ $\mathbb{P}(X^2\le t)=\mathbb{P}(-\sqrt{t}\le X\le\sqrt{t})=\mathbb{P}(X\le\sqrt{t})-\mathbb{P}(X<-\sqrt{t})=F(\sqrt{t})-F((-\sqrt{t})^-)$.

2 - $\forall t\in\mathbf{R}, \mathbb{P}(X^3\le t)=\mathbb{P}(X\le t^{1/3})=F(t^{1/3})$.

3 - Cas $a>0$: $\mathbb{P}(aX+b\le t)=\mathbb{P}(X\le(t-b)/a)=F((t-b)/a)$.

Cas $a<0$: $\mathbb{P}(aX+b\le t)=\mathbb{P}(X\ge(t-b)/a)=1-\mathbb{P}(X<(t-b)/a)=1-F(((t-b)/a))^-)$.

Cas $a=0$: $\mathbb{P}(aX+b\le t)=1_{[b,+\infty[}(t)$. C'est une masse de Dirac en b.

4 - $\forall t\in\mathbf{R}, \mathbb{P}([X]\le t)=\mathbb{P}(X<[t]+1)=F(([t]+1)^-)$.

5 - $\forall t<0, \mathbb{P}(X-[X]\le t)=0$, $\forall t\ge 1, \mathbb{P}(X-[X]\le t)=1$, $\forall t\in[0,1[, \mathbb{P}(X-[X]\le t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\mathbb{P}(k\le X\le k+t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}F(k+t)-F(k^-)$.

6 - $\forall t\le 0, \mathbb{P}(\exp X\le t)=0$, $\forall t>0, \mathbb{P}(\exp X\le t)=\mathbb{P}(X\le\ln t)=F(\ln t)$.

Exercice 4 :

a - $\mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2=0$, si X est indépendante d'elle même. D'autre part $\mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]$, donc $X-\mathbb{E}[X]=0$ p.s., et X est égale à $\mathbb{E}[X]$ p.s.

(*On a utilisé la propriété suivante: Si Y est une variable aléatoire* **positive** *et si* $\mathbb{E}[Y]=0$ *alors* $Y=0$ *p.s.*)

b - $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{E}[1_{X\le x}] = \mathbb{E}[1^2_{X\le x}] = \mathbb{E}[1_{X\le x}] \times \mathbb{E}[1_{X\le x}] = (F_X(x))^2$

Donc la fonction de répartition vaut soit 0 soit 1. C'est la fonction de répartition d'une mesure de Dirac, c'est-à-dire que X est constante p.s.

Exercice 5 :

On rappelle que la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0,1]$ au point t est égale à t si $t \in [0,1]$, 0 si $t \le 0$ et 1 si $t \ge 1$.

1 - $\forall t < 0, \mathbb{P}(\min(X_1, X_2) \le t) = 0$

$\forall t \ge 1, \mathbb{P}(\min(X_1, X_2) \le t) = 1$

$\forall t \in [0,1], \mathbb{P}(\min(X_1, X_2) \le t) = 1 - \mathbb{P}(\min(X_1, X_2) > t) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > t)\mathbb{P}(X_2 > t) = 1 - (1-t)^2 = -t^2 + 2t$. Ainsi la loi de U a une densité égale à $f_U(x) = 2(1-x)1_{[0,1]}(x)$.

2 - $\forall t < 0, \mathbb{P}(\max(X_1, X_2) \le t) = 0$

$\forall t \ge 1, \mathbb{P}(\max(X_1, X_2) \le t) = 1$

$\forall t \in [0,1], \mathbb{P}(\max(X_1, X_2) \le t) = \mathbb{P}(X_1 \le t, X_2 \le t) = \mathbb{P}(X_1 \le t)\mathbb{P}(X_2 \le t) = t^2$. Ainsi la loi de V admet une densité égale à $f_V(x) = 2x1_{[0,1]}(x)$.

Enfin, $\mathbb{E}[|X_1 - X_2|] = \mathbb{E}[V - U] = \mathbb{E}[V] - \mathbb{E}[U] = \int_0^1 2x^2dx - \int_0^1 2x(1-x)dx = 1/3$.

Exercice 6 :

1 - pour toute fonction g, de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, mesurable bornée,

$$\mathbb{E}[g(L_1, L_2)] = \mathbb{E}[g(XL, (1-X)L)] = \int_{[0,1]\times\mathbf{R}_+} g(xl, (1-x)l)f(l)dxdl$$

On fait le changement de variable $(l_1, l_2) = (xl, (1-x)l)$. On doit multiplier par le jacobien. Détaillons: On a $l = l_1 + l_2$ et $x = \frac{l_1}{l_1+l_2}$. On construit ensuite la matrice associée aux dérivées partielles:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial l_1} & \frac{\partial l}{\partial l_1} \\ \frac{\partial x}{\partial l_2} & \frac{\partial l}{\partial l_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l_2}{(l_1+l_2)^2} & 1 \\ -\frac{l_1}{(l_1+l_2)^2} & 1 \end{bmatrix}$$

Son déterminant est $\frac{1}{l_1+l_2}$. On a donc $dxdl = \left|\frac{1}{l_1+l_2}\right| dl_1dl_2$. Il faut maintenant changer les bornes. On vérifie que $(x \in [0,1], \ell \ge 0) \Leftrightarrow (\ell_1 \ge 0, \ell_2 \ge 0)$. (**Détails** : L'implication $\Rightarrow$ est immédiate. Pour $\Leftarrow$, on remarque que si $\ell_1, \ell_2 \ge 0$, alors $\ell = \ell_1 + \ell_2 \ge 0$ puis $x = \ell_1/(\ell_1 + \ell_2) \in [0,1]$). On obtient

$$\mathbb{E}[g(L_1, L_2)] = \int_{\mathbf{R}^2_+} g(l_1, l_2)\frac{f(l_1 + l_2)}{l_1 + l_2}dl_1dl_2.$$

Ainsi le couple (L_1, L_2) a une loi de densité $f_{(L_1,L_2)} = \frac{f(l_1+l_2)}{l_1+l_2}1_{\mathbf{R}^2_+}(l_1, l_2)$.

On cherche maintenant la loi de L_1. *Si le couple (X, Y) admet une densité $f_{(X,Y)}(x, y)$, la loi de X a une densité donnée par $f_X(x) = \int_{y\in\mathbf{R}} f_{(X,Y)}(x, y)dy$.* On a donc que F_{L_1} suit une loi de densité $f_{L_1}(l) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x+l)}{x+l}dx1_{\mathbf{R}_+}(l)$ qu'on peut réécrire $f_{L_1}(l) = \int_l^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx1_{\mathbf{R}_+}(l)$. La loi de L_2 admet la même densité.(En particulier, L_1 et L_2 ont la même loi.)

2 -Dans ce cas, on trouve que $f_{(L_1,L_2)}(l_1, l_2) = \lambda^2 \exp(-\lambda(l_1 + l_2))1_{\mathbf{R}^2_+}(l_1, l_2)$. L_1 et L_2 suivent donc des lois exponentielles de paramètre λ, indépendantes. (*Si (X, Y) a une densité de la forme $f_{(X,Y)}(x, y) = g(x)h(y)$, alors nécessairement X et Y sont indépendantes, et $f_X(x) = \frac{1}{\int_{\mathbf{R}} g(z)dz}g(x)$ et $f_Y(y) = \frac{1}{\int_{\mathbf{R}} h(z)dz}h(y)$.*)

3 - *On rappelle que si X suit une loi exponentielle de paramètre a, on a $\mathbb{P}(X \le t) = 1-e^{-at}$.*

$\forall t < 0, \mathbb{P}(Z \leq t) = 0$

$\forall t \geq 0, \mathbb{P}(Z \leq t) = 1 - \mathbb{P}(Z > t) = 1 - \mathbb{P}(L_1 > t)\mathbb{P}(L_2 > t) = 1 - \exp(-2\lambda t)$; On reconnaît alors la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 2λ.

Exercice 7 :

On rappelle la densité de $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ sur $\mathbf{R}$: $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

1 - Comme X et Y sont indépendantes, la densité du couple (X, Y) est simplement le produit des densités de X et de Y, donc $f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

2 - Soit g une fonction mesurable et bornée de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$:

$$\mathbb{E}[g(X, U)] = \mathbb{E}[g(X, Y/X)] = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{2\pi\sigma} g(x, y/x) \exp\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dx\, dy\,.$$

On fait le changement de variables $x = x$ et $u = y/x$. On a donc $x = x$ et $y = ux$. La matrice associée aux dérivées partielles est

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

de déterminant x. On a donc $dxdy = |x| dxdu$. Le changement de bornes est $(x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}) \Leftrightarrow (x \in \mathbf{R}, u \in \mathbf{R})$ puis:

$$\mathbb{E}[g(X, U)] = \mathbb{E}[g[X, Y/X)] = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{2\pi\sigma} g(x, u) \exp\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^2u^2}{2\sigma^2}\right) |x|\, dx\, du\,.$$

On en déduit la densité du couple (X, U) : $f_{(X,U)}(x, u) = \frac{1}{2\pi\sigma} |x| \exp\left(-\frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{u^2}{\sigma^2}\right)\right)$, $(x, u) \in \mathbf{R}^2$.

3 - Cette densité ne s'exprimant pas comme le produit de deux fonctions, l'une de x, l'autre de u, les deux variables X et U ne sont pas indépendantes.

Exercice 8 : La densité de X est $f_X(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ et celle de Y est $f_Y(y) = e^{-y}\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(y)$. Comme X et Y sont indépendantes, la densité du couple (X, Y) est $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) e^{-y} \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(y)$. Pour toute fonction borélienne et bornée, on a donc $\mathbb{E}[g(Y/X)] = \int_0^\infty \int_0^1 g(y/x) e^{-y}\, dy\, dx$. On pose $x = x$ et $u = y/x$. On obtient $dxdy = |x| dxdu$ et le changement de bornes : $(x \in [0, 1], y \geq 0) \Leftrightarrow (x \in [0, 1], y \geq 0)$ (**Détails** : Pour $\Rightarrow$ est directe. Pour $\Leftarrow$, on a $y = xu \geq 0$ et $x \in [0, 1]$ donc OK). On obtient $\mathbb{E}[g(Y/X)] = \int_0^\infty g(u) \left(\int_0^1 x e^{-xu}\, dx\right) du = \int_0^\infty g(u) \left(\frac{1 - e^{-u} - ue^{-u}}{u^2}\right) du$. La densité de Y/X est donc $f_{Y/X}(u) = \left(\frac{1 - e^{-u} - ue^{-u}}{u^2}\right) \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(u)$, $u \in \mathbf{R}$.

Remarque: Si on avait fait le changement de variables $y = y, u = y/x$, on aurait eu $dxdy = |-\frac{y}{u^2}| dydu$, et le changement de bornes aurait été $(x \in [0, 1], y \geq 0) \Leftrightarrow (y \geq 0, u \geq y)$.

Exercice 9 :

1 -

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}((x_2 - \rho x_1)^2 + (1 - \rho^2)x_1^2)\right) dx_2 \\ &= \exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right) \left(\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(1-\rho^2}\right) dx\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x_1^2/2). \end{aligned}$$

X_1 et X_2 sont donc des gaussiennes centrées de variance 1. Si X_1 et X_2 sont indépendantes $f(x_1,x_2)$ est le produit des densités marginales de X_1 et X_2; on devrait donc avoir $f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}$ ce qui ne peut être le cas que pour $\rho = 0$.

2 - Pour toute fonction g mesurable bornée,

$$\mathbb{E}[g(R,\Phi)] = \int_{\mathbf{R}_+\times[0,2\pi]} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} g(r,\phi)\exp(-\frac{r^2}{2(1-\rho^2)}(1-\rho\sin(2\phi))rdrd\phi.$$

Ainsi, la densité du couple vaut $f_{(R,\Phi)}(r,\phi) = \frac{r}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp(-\frac{r^2}{2(1-\rho^2)}(1-\rho\sin(2\phi))1_{\mathbf{R}_+\times[0,2\pi]}(r,\phi)$.

La densité marginale de Φ vaut

$$f_\Phi(\phi) = \int_{\mathbf{R}_+} f(r,\phi)dr = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\frac{1}{(1-\rho\sin 2\phi)}1_{[0,2\pi]}(\phi).$$

Exercice 10 :

1 - $\mathbb{E}[Z_a^n] = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_{\mathbf{R}_+} t^n e^{-t}t^{a-1}dt = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$.

2 - Pour toute fonction g mesurable bornée,

$$\mathbb{E}[g(Z_a/(Z_a+Z_b), Z_a+Z_b)] = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_{\mathbf{R}_+^2} g(z_a/(z_a+z_b), z_a+z_b)e^{-az_a-bz_b}z_a^{a-1}z_b^{b-1}dz_adz_b$$

On fait le changement de variables $x = \frac{z_a}{z_a+z_b}$, $y = z_a+z_b$ d'où $z_a = xy$ et $z_b = y(1-x)$. On a

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z_a}{\partial x} & \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ \frac{\partial z_a}{\partial y} & \frac{\partial z_b}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & -y \\ x & 1-x \end{bmatrix}$$

de déterminant $y(1-x)+yx = y$. Donc $dz_adz_b = |y|dxdy$. Le changement de bornes est $(z_a \geq 0, z_b \geq 0) \Leftrightarrow (x\in[0,1], y\geq 0)$. (**Détails**: $\Rightarrow$ facile. Pour $\Leftarrow$, on a $z_a = xy \geq 0$ et $z_b = y(1-x)\geq 0$). Puis

$$\mathbb{E}[g(Z_a/(Z_a+Z_b), Z_a+Z_b)] = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_{0\leq x\leq 1, y\geq 0} g(x,y)\exp(-y)y^{a+b-1}x^{a-1}(1-x)^{b-1}dxdy$$

D'où la densité $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\exp(-y)y^{a+b-1}x^{a-1}(1-x)^{b-1}1_{[0,1]\times\mathbf{R}_+}(x,y)$. Elle est le produit d'une fonction de x par une fonction de y, les deux variables sont donc indépendantes et l'on obtient la densité de la loi de $Z_a/(Z_a+Z_b)$ en l'intégrant en y, on obtient ainsi, en utilisant le fait que $\int_0^\infty e^{-t}t^{a+b-1}dt = \Gamma(a+b)$:

$f_{Z_a/(Z_a+Z_b)}(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}1_{[0,1]}(x)$ (loi Béta de paramètre (a,b)).

Exercice 11 :

1 - X et Y étant deux variables bornées, $\exists M, N$ tels que $X\leq M$ p.s., et $Y\leq N$ p.s. Ainsi, $\mathbb{E}[(M-X)(N-Y)] = \mathbb{E}[\int_X^M dx\int_Y^M dy] = \mathbb{E}[\int_{-\infty}^M 1_{X\leq x}dx\int_{-\infty}^N 1_{Y\leq y}dy] = \int_{-\infty}^M\int_{-\infty}^N \mathbb{P}(X\leq x, Y\leq y)dxdy$.

de plus $M-\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\int_{-\infty}^M 1_{X\leq x}dx] = \int_{-\infty}^M \mathbb{P}(X\leq x)dx$.

donc $\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[(M-X)(N-Y)]-(M-\mathbb{E}[X])(N-\mathbb{E}[Y]) = \int_{-\infty}^M\int_{-\infty}^N(\mathbb{P}(X\leq x, Y\leq y)-\mathbb{P}(X\leq x)\mathbb{P}(Y\leq y))dxdy = \int_{\mathbf{R}^2}(\mathbb{P}(X\leq x, Y\leq y)-\mathbb{P}(X\leq x)\mathbb{P}(Y\leq y))dxdy$

(la dernière égalité s'expliquant par le fait que $(\mathbb{P}(X\leq x, Y\leq y)-\mathbb{P}(X\leq x)\mathbb{P}(Y\leq y))$ est nul dès que $x\geq M$ ou $y\geq N$).

2 - premier membre : $\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2=\int_0^a \frac{x^2}{a}dx-(\int_0^a \frac{x}{a}dx)^2=\frac{a^2}{12}$.

deuxième membre : $\mathbb{P}(X\leq x, X\leq y)-\mathbb{P}(X\leq x)\mathbb{P}(X\leq y)=1/(a^2)(a\min(x,y)-xy)1_{(x,y)\in[0,a]^2}$ le calcul de cette intégrale en utilisant le théorème de Fubini, redonne bien le résultat précédent.

Exercice 12

1 - Inégalité de Schwarz.

2 - $\mathbb{E}[|X_1...X_n|]\leq \left(\mathbb{E}[|X_1...X_{n-1}|^2]\mathbb{E}[X_n^2]\right)^{1/2}$. Par définition de p_{n-1}, le fait que pour tout $k\leq n-1$ $\mathbb{E}[|X_k^2|^{p_{n-1}}]<\infty$, entraîne $\mathbb{E}[|X_1...X_{n-1}|^2]<\infty$. D'autre part $\mathbb{E}[|X_n|^{2p_{n-1}}]<\infty$ entraîne $\mathbb{E}[X_n^2]<\infty$ (sur un espace de probabilité $L^q\subset L^p$ si $p\leq q$, d'après l'inégalité de Hölder). Ainsi, si l'on prend $p_n=2p_{n-1}$ on a bien la propriété voulue. On peut donc choisir $p_n=2^{n-1}$.

3 - Il s'agit de trouver $\epsilon>0$ tel que $\forall k\leq n$, $\mathbb{E}[\exp(\epsilon p_n G_k^2)]=\int_{\mathbf{R}}\exp((\epsilon p_n-\frac{1}{2\sigma^2})x^2)dx<\infty$, ce qui est le cas dès lors que $\epsilon p_n-\frac{1}{2\sigma^2}<0$. Il suffit donc de choisir $\epsilon<\min_{k\leq n}\frac{1}{2p_n\sigma_k^2}$.

Exercice 13

1 - $\rho=\mathbb{P}(g(Y_n)\geq U_n)=\int_{[0,1]\times\mathbf{R}}1_{\{g(y)\geq x\}}h(y)dxdy=\int_{\mathbf{R}}g(y)h(y)dy$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau=n)&=\mathbb{P}(U_1>g(Y_1),...,U_{n-1}>g(Y_{n-1}),U_n\leq g(Y_n))\\&=\mathbb{P}(U_1>g(Y_1))...\mathbb{P}(U_{n-1}>g(Y_{n-1}))\mathbb{P}(U_n\leq g(Y_n))(\text{indépendance})\\&=(1-\rho)^{n-1}\rho\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(\tau<\infty)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(\tau=n)=\rho\sum_{n=1}^{\infty}(1-\rho)^{n-1}=1$.

2 - Pour toute fonction f, mesurable bornée,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(Y_\tau)]&=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}[f(Y_k)1_{\tau=k}]\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}[f(Y_k)1_{(U_1>g(Y_1))}...1_{(U_{k-1}>g(Y_{k-1}))}1_{(U_k\leq g(Y_k))}]\\&=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\rho)^{k-1}\mathbb{E}[f(Y_k)1_{(U_k\leq g(Y_k))}]\\&=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\rho)^{k-1}\int_{[0,1]\times\mathbf{R}}1_{\{g(y)\geq x\}}f(y)h(y)dxdy\\&=\int_{\mathbf{R}}f(y)\frac{g(y)h(y)}{\rho}dy\end{aligned}$$

Ainsi la loi de X a pour densité $g(y)h(y)/\rho$.

Exercice 14 :

1 -

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(S_1,...,S_n)]&=\int_{\mathbf{R}_+^n}f(x_1,x_1+x_2,...,x_1+..+x_n)\lambda^n\exp(-\lambda(x_1+...+x_n))dx_1..dx_n\\&=\int_{0\leq s_1\leq..\leq s_n}\lambda^n\exp(-\lambda s_n)ds_1..ds_n.\end{aligned}$$

(on a effectué le changement de variable $s_1=x_1,...,s_n=x_1+...+x_n$ de jacobien égal à 1) Ainsi la loi de $(S_1,...,S_n)$ a pour densité $f_{S_1,..,S_n}(s_1,..,s_n)=\lambda^n\exp(-\lambda s_n)1_{0\leq s_1\leq..\leq s_n}$.

2 - Il nous suffit d'intégrer cette densité en ses $n-1$ premières variables pour obtenir la densité de la loi de S_n. Ainsi,

$$\begin{aligned}f_{S_n}(s_n)&=\int_{0\leq s_1\leq...\leq s_n}\lambda^n\exp(-\lambda s_n)ds_1...ds_{n-1}\\&=\lambda^n\exp(-\lambda s_n)\int_{0\leq s_1\leq...\leq s_n}ds_1...ds_{n-1}\\&=\lambda^n\exp(-\lambda s_n)\frac{1}{(n-1)!}\int_{[0,s_n]^{n-1}}ds_1...ds_{n-1}\end{aligned}$$

(dans la dernière égalité on intègre sur le carré tout entier, et l'on divise par le nombre de façons d'ordonner $n-1$ nombres, soit $(n-1)!$.) On obtient finalement,

$$f_{S_n}(s_n) = \frac{s_n^{n-1}}{(n-1)!}\lambda^n \exp(-\lambda s_n) 1_{s_n \geq 0}.$$

3 - La fonction caractéristique de S_n, s'écrit

$$\varphi_{S_n}(t) = \mathbb{E}[e^{itS_n}] = \mathbb{E}[e^{it(X_1+\ldots+X_n)}] = \mathbb{E}[e^{itX_1}]^n \quad \text{(indépendance des } X_i\text{)}$$

Or $\mathbb{E}[e^{itX_1}] = \lambda \int_{\mathbf{R}_+} e^{itx}\exp(-\lambda x)dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}$. Donc

$$\varphi_{S_n}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^n.$$

4 - $\mathbb{E}[S_n] = n\mathbb{E}[X] = \frac{n}{\lambda}$, par linéarité de l'espérance.

D'autre part, $\mathbb{E}[S_n] = \frac{1}{i}\varphi'_{S_n}(0) = \frac{n}{\lambda}$.

$Var(S_n) = nVar(X_1) = n(\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2) = \frac{n}{\lambda^2}$. (on a utilisé l'indépendance dans la première égalité).

D'autre part, $\mathbb{E}[S_n^2] = -\varphi''_{S_n}(0) = \frac{n(n+1)}{\lambda^2}$, et donc $Var(S_n) = \mathbb{E}[S_n^2] - \mathbb{E}[S_n]^2 = \frac{n}{\lambda^2}$.

Exercice 15 :

1 - La loi d'une variabe aléatoire est caractérisée par sa fonction caractéristique, qui est dans le cas d'une $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, $\exp(-\frac{\sigma^2 x^2}{2})$ et dans le cas d'une loi de Cauchy de paramètre c, $\exp(-c|x|)$. Ainsi, l'on voit que la loi de n gaussiennes indépendantes a pour fonction caractéristique $\exp(-\frac{n\sigma^2 x^2}{2})$ et est donc égale en loi à $\sqrt{n}\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. De même, la somme de n lois de Cauchy indépendantes a pour fonction caractéristique $\exp(-nc|x|)$, et est donc égale à n fois une loi de Cauchy de paramètre c.

Pour une loi de Poisson de paramètre t, la fonction génératrice vaut $\mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t}\frac{s^k t^k}{k!} = e^{t(s-1)}$.

Mais $\mathbb{E}[s^{a_n X + b_n}] = \mathbb{E}[s^X]^n$ entraîne $s^{b_n}e^{t(s^{a_n}-1)} = e^{nt(s-1)}$, c'est-à-dire $b_n = 0$ et $a_n = 1$ et par conséquent $n = 1$. La loi de Poisson n'est donc pas stable.

2 - Si X suit une loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, alors $X_1 + .. + X_n$ suit une loi $\mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$, et $a_n X_+ b_n$ une loi $\mathcal{N}(a_n m + b_n, a_n^2\sigma^2)$. Donc $a_n = \sqrt{n}$ et $b_n = m(n - \sqrt{n})$. Ainsi

$$\frac{(X_1 - m) + \ldots + (X_n - m)}{\sqrt{n}} \overset{loi}{=} X - m$$

Le théorème central limite, permet de conclure si l'on fait tendre n vers l'infini, que X suit une loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

Exercice 16 :

1 - Pour toute rotation R de $\mathbf{R}^2$,

$\Phi(u,v) = \mathbb{E}[\exp(i((u,v)|Z))] = \mathbb{E}[\exp(i((u,v)|RZ))] = \mathbb{E}[\exp(i(R^{-1}(u,v)|Z))] = \Phi(R^{-1}(u,v))$.

Donc Φ ne dépend que du module de (u,v).

2 - a) $\phi(u,v) = \phi_X(u)\phi_Y(v) = \psi(u^2+v^2)$. $\phi_Y(0) = 1$ donc $\phi_X(u) = \psi(u^2)$ et de même $\phi_Y(u) = \psi(u^2)$. Donc X et Y ont même loi et leur fonction caractéristique sont paires. Or il est un fait général que $\phi_X(-u) = \overline{\phi_X(u)}$, et donc $\phi_X(u) = \overline{\phi_X(u)}$ et donc $\phi_X(u)$ est réelle.

b) Des identités écrites au dessus on déduit que

$$\forall u, v > 0, \quad \psi(u+v) = \psi(u)\psi(v). \quad (\star)$$

Supposons que $\exists x \in \mathbf{R}_+$ tel que $\psi(x) = 0$. $x \neq 0$ car $\psi(0) = \phi_X(0) = 1$. D'après $(\star)$, $\psi(\frac{x}{2})^2 = \psi(x) = 0$, d'où $\psi(\frac{x}{2}) = 0$ et par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$, $\psi(\frac{x}{2^k}) = 0$ ce qui conterdit la continuité de ψ en 0. Donc ψ ne s'annule pas.

c) $0 < \psi \leq 1$, posons $e^{-\lambda} = \psi(1)$. Par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, on a $\forall x \in \mathbf{R}_+$, $\psi(nx) = (\psi(x))^n$, d'où $\psi(n) = (\psi(1))^n = e^{-\lambda n}$.

On a alors $\forall (n,p) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^\star$, $\psi(n/p) = (\psi(n))^{1/p} = e^{-\lambda n/p}$, Q étant dense on conclut par continuité que $\forall t \in \mathbf{R}_+$, $\psi(t) = e^{-\lambda t}$. Ainsi

$$\forall u \in \mathbf{R},\ \phi_X(u) = e^{-\lambda u^2}$$

C'est la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(\prime, \in\lambda)$.

d) Pour toute fonction mesurable bornée sur $\mathbf{R}_+ \times [0, 2\pi]$,

$$\mathbb{E}[f(R,\theta)] = \int_{\mathbf{R}_+ \times [0,2\pi]} \frac{f(r,\theta)}{4\pi\lambda} \exp(-\frac{r^2}{4\lambda}) r dr d\theta.$$

La loi de (R,θ) a pour densité $\frac{1}{4\pi\lambda}\exp(-\frac{r^2}{4\lambda}) r 1_{\mathbf{R}_+ \times [0,2\pi]}(r,\theta)$. Donc (R,θ) sont indépendantes, θ suit une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$, et R suit la loi de densité $r/(2\lambda)\exp(-\frac{r^2}{4\lambda}) 1_{\mathbf{R}_+}(r)$.