Université Pierre et Marie Curie **Année 2013-2014**

L3 - Mathématiques Probabilités - LM390

Série d'exercices N°4

<u>*Quelques généralités*</u>

Exercice 1

1) Soit X une v.a. de fonction de répartition F. On suppose que F est continue en $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{P}(X = a) = 0$.

2) Soit X une v.a. de fonction de répartition F, continue sur $\mathbb{R}$. Donner la loi de $F(X)$.

3) Soit X et Y deux v.a. indépendantes. On suppose que X a une fonction de répartition continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

Exercice 2

Soient $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. (indépendantes identiquement distribuées). On suppose que X_1 a une fonction de répartition continue. Calculer $\mathbb{P}(X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_n)$.

<u>*Autour des lois usuelles*</u>

Exercice 3

Pour les lois uniforme, exponentielle et gaussienne,

1) Calculer l'espérance et la variance

2) Calculer la fonction de répartition

3) Calculer la fonction caractéristique

Exercice 4

Une variable aléatoire positive X est *sans mémoire* si

$$\mathbb{P}(X > t + s \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s) \qquad \forall\, t, s \geq 0.$$

1) Montrer que si $\mathbb{P}(X > 0) > 0$, alors $\mathbb{P}(X > t) > 0$ pour tout $t > 0$.

2) On suppose que $\mathbb{P}(X > 0) > 0$. Soit $h(t) := \log \mathbb{P}(X > t)$ pour tout $t > 0$. Montrer que $h(t) = th(1)$ pour tout t entier, puis t rationnel positif, puis t réel positif.

3) En déduire que soit $X = 0$ p.s, soit X suit une loi exponentielle.

Exercice 5

Soit $(X_i,\, 1 \leq i \leq n)$ n variables indépendantes, telles que pour tout i, X_i suit une loi gaussienne

$\mathcal{N}(m_i, \sigma_i)$. Montrer que $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi gaussienne dont on donnera les paramètres en fonction de $(m_i, \sigma_i,\ 1 \le i \le n)$. On pourra s'aider des fonctions caractéristiques.

Exercice 6

Donner la loi de la somme de 2 variables indépendantes X et Y telles que

1) X et Y suivent des lois exponentielles,

2) X et Y suivent une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$.

Loi de minimum, maximum

Exercice 7

Soit $(X_i)_{i\ge1}$ une famille de variables i.i.d.. Donner la loi de $\min_{1\le i\le n} X_i$ et $\max_{1\le i\le n} X_i$ lorsque X_i a pour loi

1) la loi uniforme sur $[a, b]$

2) une loi exponentielle

3) une loi de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 8

Soient $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ des v.a. positives indépendantes et de même fonction de répartition F continue et telle que $F(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1) Soit un réel $a > 0$. On pose $N := \min\{n \ge 1 \,:\, X_n > a\}$. Donner la loi de N et montrer que $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$. Calculer $\mathbb{E}[N]$.

2) Même question si on pose cette fois-ci $N := \min\{n \ge 1 \,:\, X_n > X_0\}$.

3) * On suppose dans cette question que les variables $(X_n)_{n\ge0}$ suivent une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et on garde N comme dans 2). Donner la loi de $(X_0, X_N - X_0)$ et montrer que ces variables sont indépendantes.

Indépendance de 2 variables

Exercice 9

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, et de même loi de densité donnée par

$$f(x) = \frac{\lambda^4}{6} x^3 \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

On pose $V = X + Y$ et $W = \frac{X}{X+Y}$.

1) Montrer que f est bien une densité de probabilité.

2) Calculer la densité du couple (V, W).

3) Montrer que V et W sont indépendantes et donner leurs lois marginales.

Exercice 10

Soient X et Y deux variables indépendantes, et de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On définit les variables aléatoires R sur $\mathbb{R}_+$ et Φ sur $]0,2\pi[$ par $R=\sqrt{X^2+Y^2}$ et

$$X = R\cos\Phi, \qquad Y = R\sin\Phi\,.$$

Calculer la densité du couple (R,Φ). Montrer que R et Φ sont indépendantes.

Exercice 11

On se donne $(X_i)_{1\le i\le n}$ i.i.d de loi uniforme sur $[0,1]$. On note $Y := \min_{1\le i\le n} X_i$ et $Z := \max_{1\le i\le n} X_i$.

1) Donner la loi de (Y,Z).

2) Montrer que $(1-Z, 1-Y)$ a même loi que (Y,Z).

3) Donner la loi de $\frac{Y}{Z}$.

4) Montrer que $\frac{1-Z}{1-Y}$ est indépendant de Y.

Exercice 12 (suite de l'exercice 8)

Soient $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ comme dans l'exercice 8.

1) Soit $a>0$ et $N := \min\{n\ge 1 \,:\, X_n > a\}$. Montrer que N et X_N sont indépendantes.

2) Soit maintenant $N := \min\{n\ge 1 \,:\, X_n > X_0\}$. Trouver la loi de (N, X_N). On pourra calculer $\mathbb{P}(N=n,\, X_N\le t)$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{R}$. Les variables N et X_N sont-elles indépendantes? Donner la fonction de répartition de X_N.

Statistiques d'ordre

Dans les exercices suivants, les statistiques d'ordre $X_{(1)},\ldots,X_{(n)}$ désignent les variables $X_1,\ldots,X_n$ arrangées par ordre croissant.

Exercice 13

Soit $(X_i)_{1\le i\le n}$ des variables i.i.d admettant une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. Quelle est la densité de $(X_{(1)},\ldots,X_{(n)})$?

Exercice 14

Soit $(X_n)_{n\ge 1}$ une suite de v.a. i.i.d de loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$. On pose $S_n = X_1+\ldots+X_n$, et pour $t>0$, $N(t)=\sum_{n\ge 1} \mathbb{1}_{\{S_n\le t\}}$.

1) Donner la loi de $(S_1,\ldots,S_n)$ puis de S_n.

2) Montrer que la loi conditionnelle de $(S_1,\ldots,S_n)$ sachant $N(t)=n$ est la loi statistique d'ordre $(U_{(1)},\ldots,U_{(n)})$ de n v.a. i.i.d de loi uniforme sur $[0,t]$.

Exercice 15

Soit $(X_n)_{n\geq 2}$ une suite de v.a. i.i.d de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Montrer que $(\frac{S_k}{S_n})_{1\leq k\leq n-1}$ a la loi de la statistique d'ordre $(U_{(1)}, \ldots, U_{(n-1)})$ de $n-1$ v.a. i.i.d de loi uniforme sur $[0,1]$.

*** Exercice 16**

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi de fonction de répartition F continue. Soit $m \geq 1$ et $X_{(1)}, \ldots, X_{(m)}$ les statistiques d'ordre de $X_1, \ldots, X_m$.

1) Soit $N := \min\{n \geq 1 \,:\, X_{m+n} \geq X_{(m)}\}$. Donner la loi de N.

2) Pour $r < m$, soit $N_r := \min\{n \geq 1 \,:\, X_{m+n} \geq X_{(m-r)}\}$. Donner la loi de N_r.