Université Pierre et Marie Curie | **Année 2013-2014**
L3 - Mathématiques | Second semestre
Probabilités - LM390

Feuille de TD n°4

I. Quelques généralités

Exercice 1

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on a que $\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X \leq a) - \mathbb{P}(X < a) = F(a) - F(a^-)$. Puisque F est continue en a $F(a^-) = F(a)$, d'où $\mathbb{P}(X = a) = F(a) - F(a^-) = 0$.
2. On cherche la fonction de répartition de $F(X)$. Posons, pour $t \in]0,1[$, $F^{-1}(t) = \sup\{s \in \mathbb{R} : F(s) \leq t\}$ (Remarquer que F^{-1} est bien définie sur $]0,1[$ car F est croissante, donc $F^{-1}(t)$ est fini). On remarque que, pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $t \in]0,1[$, $(F(s) \leq t) \Leftrightarrow (s \leq F^{-1}(t))$ (**Détails** : Si $F(s) \leq t$, alors $s \leq F^{-1}(t)$ par la définition de F^{-1} ; si $s \leq F^{-1}(t)$, alors soit $s < F^{-1}(t)$ donc $F(s) \leq t$, par définition de F^{-1}, soit $s = F^{-1}(t)$, et on a alors $F(s) = t$ car F est continue). En particulier on a égalité des évènements $\{F(X) \leq t\} = \{X \leq F^{-1}(t)\}$. D'où $\mathbb{P}(F(X) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(t)) = F(F^{-1}(t)) = t$ car F est continue, ce pour tout $t \in]0,1[$. Donc $F(X)$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$.
3. Puisque X et Y sont indépendantes, on a
$$\mathbb{P}(Y - X = 0) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{0\}}(y - x) d\mathbb{P}_X(x) \otimes d\mathbb{P}_Y(y).$$
Avec le théorème de Fubini, on obtient
$$\mathbb{P}(Y - X = 0) = \int_{\mathbb{R}} d\mathbb{P}_Y(y) \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{0\}}(y - x) d\mathbb{P}_X(x).$$
Puisque la loi de X est continue, pour tout y fixé,
$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{0\}}(x - y) d\mathbb{P}_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{y\}}(x) d\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}_X(\{y\}) = 0,$$
d'où
$$\mathbb{P}(Y - X = 0) = 0.$$

Exercice 2

Puisque les v.a. X_i sont indépendantes et de même loi continue, on a pour $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, $\mathbb{P}(X_i = X_j) = 0$ (voir Exercice 1 3.). Par suite
$$\mathbb{P}(X_1 \leq X_2 \leq \cdots \leq X_n) = \mathbb{P}(X_1 < X_2 < \cdots < X_n).$$
Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations des indices $\{1, \ldots, n\}$. Comme les variables aléatoires sont indépedantes et de même loi, pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, le n-uplet $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ a même loi que $(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$. Ainsi, $\mathbb{P}(X_1 < X_2 < \cdots < X_n) = \mathbb{P}(X_{\sigma(1)} < X_{\sigma(2)} < \cdots < X_{\sigma(n)})$ pour toute permutation σ. On remarque que
$$\Omega = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \{X_{\sigma(1)} < X_{\sigma(2)} < \cdots < X_{\sigma(n)}\} \cup \{\exists\, i \neq j : X_i = X_j\}.$$

La nullité de $\mathbb{P}(X_i = X_j)$ pour i et j distincts donne que l'évènement $\{\exists\, i \neq j : X_i = X_j\}$ est de probabilité nulle. Donc ,(en utilisant que la probabilité d'une union **disjointe** est la somme des probabilités)

$$1 = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{P}(X_{\sigma(1)} < X_{\sigma(2)} < \cdots < X_{\sigma(n)}) = \mathrm{Card}(\mathcal{S}_\mathrm{n})\mathbb{P}(X_1 < X_2 < \cdots < X_n).$$

Comme $\mathrm{Card}(\mathcal{S}_\mathrm{n}) = n!$, on a

$$\mathbb{P}(X_1 < X_2 < \cdots < X_n) = \frac{1}{n!}.$$

Autre solution. On note $X_{(1)} < X_{(2)} < \ldots < X_{(n)}$ les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ rangés dans l'ordre croissant (on ne se place pas forcément sur l'évènement $X_1 < X_2 \ldots < X_n$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $\sigma_X(i)$ l'indice j tel que $X_j = X_{(i)}$. On a donc σ_X qui est une permutation (aléatoire). De plus, par symétrie, σ_X est uniformément distribuée parmi toutes les permutations (il y en a $n!$). En effet soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Alors $\mathbb{P}(\sigma_X = \sigma) = \mathbb{P}(X_{\sigma(1)} < \ldots < X_{\sigma(n)}) = \mathbb{P}(X_1 < \ldots < X_n)$ qui ne dépend pas du choix de σ. On a donc,

$$\mathbb{P}(X_1 < X_2 < \cdots < X_n) = \mathbb{P}(\sigma(i) = i \forall i \leq n) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\mathcal{S}_n)} = \frac{1}{n!}.$$

II. Autour des lois usuelles

Exercice 3

1. *Loi uniforme sur* $[a, b]$. Si X suit une loi uniforme sur $[a, b]$, sa densité est $f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$ et on a

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

et

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3},$$

d'où

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Sa fonction de répartion est donnée par

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x > b \\ \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{t \leq x\}} f_X(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^x dt = \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \end{cases}.$$

La fonction caractéristique de X est alors

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{itx}dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

2. *Loi exponentielle de paramètre* λ. Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, sa densité est $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ et on a par intégration par parties

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx = \int_{\mathbb{R}_+} \lambda x e^{-\lambda x}dx = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

et

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx = \int_{\mathbb{R}_+} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda}\mathbb{E}[X] = \frac{2}{\lambda^2},$$

d'où

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Sa fonction de répartion est donnée par

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{t \leq x\}} f_X(t)dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

La fonction caractéristique de X est alors

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)dx = \int_{\mathbb{R}_+} \lambda e^{(it-\lambda)x} dx = \left[\frac{\lambda e^{(it-\lambda)x}}{it-\lambda}\right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

3. *Loi gaussienne de moyenne m et de variance σ^2.* Si X suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, sa densité est $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$. Par définition de cette loi $\mathbb{E}[X] = m$,$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ et on ne peut pas calculer explicitement sa fonction de répartition. La fonction caractéristique de X est alors

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} + itx\right) dx.$$

En utilisant la forme canonique

$$-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} + itx = -\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2 - 2(m + it\sigma^2)x + m^2\right) = -\frac{1}{2\sigma^2}\left((x - (m + it\sigma^2))^2 - 2imt\sigma^2 + t^2\sigma^4\right),$$

on obtient

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(imt - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{(x - (m + it\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right) dx = \exp\left(imt - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$$

car $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-(m+it\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right) dx = 1$.

Exercice 4

1. Considérons la suite croissante d'événements $(\{X > \frac{1}{n}\})_{n\geq 1}$. On a $\bigcup_{n\geq 1}\{X > \frac{1}{n}\} = \{X > 0\}$, si bien que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X > \frac{1}{n}) = \mathbb{P}(X > 0) > 0$. En particulier, $\exists \varepsilon = \frac{1}{n_0}$ tel que $\mathbb{P}(X > \varepsilon) > 0$ et l'hypothèse de départ nous donne, par récurrence simple

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(X > n\varepsilon) = \mathbb{P}(X > \varepsilon)^n > 0.$$

On en déduit facilement que $\mathbb{P}(X > t) > 0$ pour tout $t > 0$.

2. L'hypothèse de départ se réécrit

$$\forall s, t \geq 0, \quad h(t+s) = h(t) + h(s)$$

ce qui entraîne en particulier, par récurrence

$$\forall n \geq 1, \quad h(nt) = nh(t).$$

En écrivant, pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, $h(q\frac{p}{q}) = qh(\frac{p}{q}) = h(p) = ph(1)$, on obtient $h(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}h(1)$, ce qui est la relation demandée pour t rationnel positif.

Pour étendre à t réel positif, on remarque que h est décroissante et l'on choisit deux suites (r_n) et (r'_n) de rationnels positifs, la première croissante et la seconde décroissante, qui convergent vers t, si bien que

$$r'_n h(1) = h(r'_n) \leq h(r_n) = r_n h(1).$$

Par passage à la limite, on obtient $h(t) = th(1)$. (**remarque**. On aurait pu aussi utiliser que $h(t)$ est continue à droite).

3. $X = 0$ est une solution triviale. Si $\mathbb{P}(X > 0) > 0$, on a montré que $\mathbb{P}(X \leq t) = 1 - e^{-h(t)} = 1 - e^{th(1)}$. On a forcément $h(1) < 0$ (si $h(1) = 0$, alors $\mathbb{P}(X \leq t) = 0$ pour tout t donc $X = +\infty$ ps, ce que l'on exclut car X est une v.a. rélle). Finalement, X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = -h(1) > 0$.

Exercice 5

La fonction caractéristique de S_n est

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_n}(t) &= \mathbb{E}\left[e^{itS_n}\right] = \mathbb{E}\left[e^{it\sum_{k=1}^n X_k}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n e^{itX_k}\right] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}\left[e^{itX_k}\right] \quad \text{par indépendance des } X_k \\
&= \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^n \exp\left(im_k t - \frac{t^2\sigma_k^2}{2}\right) = \exp\left(it\sum_{k=1}^n m_k - \frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^n \sigma_k^2\right).
\end{aligned}$$

On reconnait la fonction caractéristique de la loi gaussienne de moyenne $\sum_{k=1}^n m_k$ et de variance $\sum_{k=1}^n \sigma_k^2$.

Exercice 6

1. Soient X et Y sont deux v.a. indépendantes de lois exponentielles de paramètres λ et μ respectivement. Soit g mesurable positive. Alors

$$\mathbb{E}[g(X+Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} g(x+y)\lambda\mu e^{-\lambda x}e^{-\mu y}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(y)dxdy$$

On fait le changement de variables $x = x$, $z = x + y$. On trouve $dxdy = |1|dxdz$. Le changement de bornes est $(x \geq 0, y \geq 0) \Leftrightarrow (x \geq 0, z \geq x)$. On obtient

$$\mathbb{E}[g(X+Y)] = \int_{z \geq x \geq 0} g(z)\lambda\mu e^{-(\lambda-\mu)x}e^{-\mu z}dxdz = \int_{z\geq 0} g(z)\lambda\mu e^{-\mu z}\int_0^z e^{-(\lambda-\mu)x}dxdz.$$

D'où, si $\lambda \neq \mu$,

$$f_{X+Y}(z) = \lambda\mu\frac{e^{-\lambda z} - e^{-\mu z}}{\mu - \lambda}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(z)$$

et si $\lambda = \mu$

$$f_{X+Y}(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(z)$$

.

2. Soient X et Y sont deux v.a. indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$. Soit g mesurable positive. Alors

$$\mathbb{E}[g(X+Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} g(x+y)\left(\frac{1}{b-a}\right)^2\mathbf{1}_{[a,b]}(x)\mathbf{1}_{[a,b]}(y)dxdy$$

On fait le changement de variables $x = x$, $z = x + y$. On trouve $dxdy = |1|dxdz$. Le changement de bornes est $(x \in [a, b], y \in [a, b]) \Leftrightarrow (x \in [a, b], z \in [a + x, b + x])$ (**Vérifiez-le !**). On obtient finalement

$$\mathbb{E}[g(X+Y)] = \int_{x\in[a,b],z\in[a+x,b+x]} g(z)\left(\frac{1}{b-a}\right)^2 dxdz = \int_{z\in[2a,2b]} g(z)\left(\frac{1}{b-a}\right)^2 \int_{x\in[a,b]\cap[z-b,z-a]} 1dxdz.$$

On remarque que

$$[a, b] \cap [z - b, z - a] = \begin{cases} [a, z-a] & \text{si } 2a \leq z \leq a+b \\ [z-b, b] & \text{si } a+b \leq z \leq 2b \end{cases}$$

on trouve donc

$$f_{X+Y}(z) = \left(\frac{1}{b-a}\right)^2 (z - 2a)\mathbf{1}_{[2a,a+b]}(z) + \left(\frac{1}{b-a}\right)^2 (2b - z)\mathbf{1}_{[a+b,2b]}(z).$$

III. Loi de minimum, maximum

Exercice 7

On pose $X_{(1)} = \min_{1\leq i\leq n} X_i$ et $X_{(n)} = \max_{1\leq i\leq n} X_i$.

1. *Loi uniforme sur* $[a, b]$. La loi du minimum $X_{(1)}$ est donnée par : $\mathbb{P}(\min_{1\leq i\leq n} X_i \geq t) = 1$ si $t < a$, $\mathbb{P}(\min_{1\leq i\leq n} X_i \geq t) = 0$ si $t > b$ et pour $a \leq t \leq b$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\min_{1\leq i\leq n} X_i \geq t) &= \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \geq t\}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \geq t) \quad \text{car les } X_i \text{ sont indépendants} \\ &= \mathbb{P}(X_1 \geq t)^n \quad \text{car les } X_i \text{ ont même loi} \\ &= \left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right)^n = \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^n. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction de répartition du minimum est

$$F_{X_{(1)}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t > b \\ 1 - (\frac{b-t}{b-a})^n & \text{si } a \leq t \leq b \end{cases},$$

et sa densité est obtenue en dérivant cette expression, *i.e.* la densité du minimum est donc $f_{X_{(1)}}(t) = \frac{n}{b-a}\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-1}\mathbf{1}_{[a,b]}(t)$.

La loi du maximum $X_{(n)}$ est donnée par : $\mathbb{P}(\max_{1\leq i\leq n} X_i \leq t) = 0$ si $t < a$, $\mathbb{P}(\max_{1\leq i\leq n} X_i \leq t) = 1$ si $t > b$ et pour $a \leq t \leq b$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max_{1\leq i\leq n} X_i \leq t) &= \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \leq t\}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq t) \quad \text{car les } X_i \text{ sont indépendants} \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq t)^n \quad \text{car les } X_i \text{ ont même loi} \\ &= \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^n. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction de répartition du maximum est

$$F_{X_{(n)}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t > b \\ \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^n & \text{si } a \leq t \leq b \end{cases},$$

et sa densité est obtenue en dérivant cette expression, *i.e.* la densité du maximum est donc $f_{X_{(n)}}(t) = \frac{n}{b-a}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^{n-1}\mathbf{1}_{[a,b]}(t)$.

2. *Loi exponentielle de paramètre* λ. La loi du minimum $X_{(1)}$ est donnée par : $\mathbb{P}(\min_{1\leq i\leq n} X_i \geq t) = 1$ si $t \leq 0$ et pour $t > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\min_{1\leq i\leq n} X_i \geq t) &= \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \geq t\}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \geq t) \quad \text{car les } X_i \text{ sont indépendants} \\ &= \mathbb{P}(X_1 \geq t)^n \quad \text{car les } X_i \text{ ont même loi} \\ &= e^{-n\lambda t}. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction de répartition du minimum est

$$F_{X_{(1)}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - e^{-n\lambda t} & \text{si } t > 0 \end{cases},$$

et sa densité est obtenue en dérivant cette expression, *i.e.* la densité du minimum est donc $f_{X_{(1)}}(t) = n\lambda e^{-n\lambda t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$. Donc $X_{(1)}$ suit une loi exponentielle de paramètre $n\lambda$.

La loi du maximum $X_{(n)}$ est donnée par : $\mathbb{P}(\max_{1\leq i\leq n} X_i \leq t) = 0$ si $t \leq 0$ et pour $t > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max_{1\leq i\leq n} X_i \leq t) &= \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq t\}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq t) \quad \text{car les } X_i \text{ sont indépendants} \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq t)^n \quad \text{car les } X_i \text{ ont même loi} \\ &= (1 - e^{-\lambda t})^n. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction de répartition du maximum est

$$F_{X_{(n)}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ (1 - e^{-\lambda t})^n & \text{si } t > 0 \end{cases},$$

et sa densité est obtenue en dérivant cette expression, *i.e.* la densité du maximum est donc $f_{X_{(n)}}(t) = n\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$.

3. *Loi de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue.* La loi du minimum $X_{(1)}$ est donnée, pour $t \in \mathbb{R}$, par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\min_{1\leq i\leq n} X_i \geq t) &= \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \geq t\}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \geq t) \quad \text{car les } X_i \text{ sont indépendants} \\ &= \mathbb{P}(X_1 \geq t)^n \quad \text{car les } X_i \text{ ont même loi} \\ &= (1 - F(t))^n \quad \text{car } F \text{ est continue.} \end{aligned}$$

Ainsi la fonction de répartition du minimum est $F_{X_{(1)}}(t) = 1 - (1 - F(t))^n$ pour $t \in \mathbb{R}$, et sa densité est obtenue en dérivant cette expression, *i.e.* la densité du minimum est donc $f_{X_{(1)}}(t) = nf(t)(1 - F(t))^{n-1}$.

La loi du maximum $X_{(n)}$ est donnée, pour $t \in \mathbb{R}$, par

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\max_{1\le i\le n} X_i \le t) &= \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \le t\}) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i \le t) \quad \text{car les } X_i \text{ sont indépendants}\\
&= \mathbb{P}(X_1 \le t)^n \quad \text{car les } X_i \text{ ont même loi}\\
&= F(t)^n.
\end{aligned}$$

Ainsi la fonction de répartition du maximum est $F_{X_{(n)}}(t) = F(t)^n$ pour $t \in \mathbb{R}$, et sa densité est obtenue en dérivant cette expression, *i.e.* la densité du maximum est donc $f_{X_{(n)}}(t) = nf(t)F(t)^{n-1}$.

Exercice 8

1. Pour $k \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{k-1}\{X_i \le a\} \cap \{X_k > a\}) = \mathbb{P}(X_k > a)\prod_{i=1}^{k-1}\mathbb{P}(X_i \le a) = (1 - F(a))F(a)^{k-1}.$$

On a $\mathbb{P}(N = +\infty) = \lim_{k\to\infty}\mathbb{P}(N \geq k)$. On calcule que $\mathbb{P}(N \geq k) = \sum_{\ell\geq k}(1 - F(a))F(a)^{\ell-1} = F(a)^{k-1}$ (on aurait pu voir aussi que $\{N \geq k\} = \{X_1 \le a, X_2 \le a, \ldots, X_{k-1} \le a\}$). Puisque $F(a) < 1$, on trouve que $\mathbb{P}(N = \infty) = 0$ donc N est *p.s.* fini. On déduit alors l'espérance de N,

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{k\geq 1} k\mathbb{P}(N = k) = (1 - F(a))\sum_{k\geq 1} kF(a)^{k-1} = (1 - F(a))\frac{\partial}{\partial F(a)}\left(\sum_{k\geq 1} F(a)^k\right).$$

Or $\sum_{k\geq 1} F(a)^k = \frac{F(a)}{1-F(a)}$ car $0 < F(a) < 1$ et donc $\frac{\partial}{\partial F(a)}\left(\sum_{k\geq 1} F(a)^k\right) = \frac{1}{(1-F(a))^2}$, d'où

$$\mathbb{E}[N] = (1 - F(a))\frac{1}{(1 - F(a))^2} = \frac{1}{1 - F(a)}.$$

2. Puisque $N = \min\{n \geq 1 : X_n > X_0\}$, on a, pour $k \geq 1$,

$$\{N = k\} = \bigcap_{i=1}^{k-1}\{X_i \le X_0\} \cap \{X_k > X_0\}.$$

Puisque les v.a. X_i sont indépendantes et de même loi continue, on a pour $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, $\mathbb{P}(X_i = X_j) = 0$ (voir Exercice 1 3.). Par suite

$$\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{k-1}\{X_i < X_0\} \cap \{X_k > X_0\}).$$

Il y a $(k - 1)!$ façons d'ordonner les variables $X_1, \ldots, X_{k-1}$. Donc

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{k-1}\{X_i < X_0\} \cap \{X_k > X_0\}) = (k - 1)!\mathbb{P}(X_1 < X_2 < \ldots < X_{k-1} < X_0 < X_k\})$$

Puis, comme il y a $(k+1)!$ façons d'ordonner les variables $X_0, \ldots, X_k$, on a

$$\mathbb{P}(N = k) = \frac{(k-1)!}{(k+1)!} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

D'autre part, on a $\{N < +\infty\} = \bigcup_k \{N \leq k\}$, et comme la suite d'événements $\{N \leq k\}$ est croissante, $\mathbb{P}(N < +\infty) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(N \leq k) = 1$, car $\mathbb{P}(N \leq k) = \sum_{n=1}^k \mathbb{P}(N = n) = 1 - \frac{1}{k+1}$ puisque $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. On a

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{k\geq 1} k\mathbb{P}(N = k) = +\infty.$$

On remarque ici que la loi de N ne dépend pas de F.

3. On suppose dans cette question que les variables $(X_n)_{n\geq 0}$ suivent une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et on garde N comme dans 3. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne positive. On va calculer $\mathbb{E}[g(X_0, X_N - X_0)]$. Comme $N < +\infty$ $\mathbb{P}$-$p.s.$, on a

$$\mathbb{E}[g(X_0, X_N - X_0)] = \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[g(X_0, X_k - X_0)\mathbf{1}_{\{N=k\}}].$$

On remarque que $\{N = k\} = \{\max_{1\leq i\leq k-1} X_i < X_0\} \cap \{X_k > X_0\}$ donc

$$\mathbb{E}[g(X_0, X_k - X_0)\mathbf{1}_{\{N=k\}}] = \mathbb{E}[g(X_0, X_k - X_0)\mathbf{1}_{\{\max_{1\leq i\leq k-1} X_i < X_0\}}\mathbf{1}_{\{X_k > X_0\}}].$$

On calcule

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[g(X_0, X_k - X_0)\mathbf{1}_{\{\max_{1\leq i\leq k-1} X_i < X_0\}}\mathbf{1}_{\{X_k > X_0\}}] \\ = &\int_{(x_0,\ldots,x_k)\in\mathbb{R}_+^{k+1}} g(x_0, x_k - x_0)\mathbf{1}_{\{\max_{1\leq i\leq k-1} x_i < x_0\}}\mathbf{1}_{\{x_k > x_0\}}\lambda^{k+1}e^{-\lambda(x_0+\ldots+x_k)}dx_0\cdots dx_k. \end{aligned}$$

Par Fubini, on trouve que

$$\begin{aligned} &\int_{(x_0,\ldots,x_k)\in\mathbb{R}_+^{k+1}} g(x_0, x_k - x_0)\mathbf{1}_{\{\max_{1\leq i\leq k-1} x_i < x_0\}}\mathbf{1}_{\{x_k > x_0\}}\lambda^{k+1}e^{-\lambda(x_0+\ldots+x_k)}dx_0\cdots dx_k \\ = &\int_{x_0 < x_k} g(x_0, x_k - x_0)\lambda^2 e^{-\lambda(x_0+x_k)}(1 - e^{-\lambda x_0})^{k-1}dx_0dx_k \\ = &\int_{(x_0,y)\in\mathbb{R}_+^2} g(x_0, y)\lambda^2 e^{-\lambda(2x_0+y)}(1 - e^{-\lambda x_0})^{k-1}dx_0dy \end{aligned}$$

par le changement de variable $y = x_k - x_0$. On obtient que

$$\mathbb{E}[g(X_0, X_k - X_0)\mathbf{1}_{\{N=k\}}] = \int_{(x_0,y)\in{\mathbb{R}_+}^2} g(x_0, y)\lambda^2 e^{-\lambda(2x_0+y)}(1 - e^{-\lambda x_0})^{k-1}dx_0dy.$$

En sommant sur $k \geq 1$, on trouve

$$\mathbb{E}[g(X_0, X_N - X_0)] = \int_{(x_0,y)\in{\mathbb{R}_+}^2} g(x_0, y)\lambda^2 e^{-\lambda(x_0+y)}dx_0dy.$$

Ainsi, X_0 et $X_N - X_0$ sont 2 variables exponentielles indépendantes de paramètre λ.

IV. Indépendance de deux variables

Exercice 9

1. Pour montrer que f est bien une densité de probabilité, nous voyons déjà que f est positive et mesurable (car continue), il reste donc à vérifier que son intégrale vaut 1. Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)dx &= \frac{\lambda^3}{6}\int_{\mathbb{R}_+} \lambda x^4 e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda^3}{6}\left(\left[-x^3 e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 3\int_{\mathbb{R}_+} x^2 e^{-\lambda x}dx\right)\\ &= \frac{\lambda^2}{2}\int_{\mathbb{R}_+} \lambda x^2 e^{-\lambda x}dx\end{aligned}$$

Or $\int_{\mathbb{R}_+} \lambda x^2 e^{-\lambda x}dx$ est le moment d'ordre 2 d'une v.a. de loi exponentielle de paramètre λ que l'on a déjà calculé dans l'Exercice 3 et qui vaut $\frac{2}{\lambda^2}$. Donc $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ et f est bien une densité de probabilité.

2. *Densité du couple* (V, W). Pour toute fonction mesurable bornée g, on a, en utilisant que X et Y sont indépendantes (*i.e.* la densité jointe est le produit des densités),

$$\mathbb{E}[g(V,W)] = \mathbb{E}\left[g\left(X+Y, \frac{X}{X+Y}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}_+^2} g\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) f(x)f(y)dxdy.$$

On effectue le changement de variable $v = x+y$, $w = \frac{x}{x+y}$. On a $dxdy = |v|dvdw$. Le changement de bornes est $(x \geq 0, y \geq 0) \Leftrightarrow (v \geq 0, w \in [0,1])$. On obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(V,W)] &= \int_{\mathbb{R}_+\times[0,1]} g(v,w)\, v f(vw) f(v(1-w))dvdw\\ &= \frac{\lambda^8}{36}\int_{\mathbb{R}_+\times[0,1]} g(v,w)\,(vw)^3 e^{-\lambda vw}(v(1-w))^3 e^{-\lambda v(1-w)} v dvdw\\ &= \frac{\lambda^8}{36}\int_{\mathbb{R}_+\times[0,1]} g(v,w)\, v^7 w^3 (1-w)^3 e^{-\lambda v} dvdw,\end{aligned}$$

donc $f_{(V,W)}(v,w) = \frac{\lambda^8}{36} v^7 w^3 (1-w)^3 e^{-\lambda v}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(v)\mathbf{1}_{[0,1]}(w)$.

3. La densité du couple (V, W) pouvant s'écrire comme le prouit de deux fonctions, l'une de V et l'autre de W, on en déduit que V et W sont indépendantes. Leurs lois marginales sont données par

$$f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{(V,W)}(v,w)dw \quad \text{et} \quad f_W(w) = \int_{\mathbb{R}} f_{(V,W)}(v,w)dv.$$

Comme V et W sont indépendantes, nous n'avons ici qu'à trouver les constantes de renormalisation. Il suffit la de trouver pour l'une des densités pour en déduire la seconde. En utilisant le même type de calcul que dans 1., on a

$$\lambda^8\int_{\mathbb{R}_+} v^7 e^{-\lambda v}dv = 7\lambda^7\int_{\mathbb{R}_+} v^6 e^{-\lambda v}dv = 7\times 6\lambda^6\int_{\mathbb{R}_+} v^5 e^{-\lambda v}dv = \cdots = 7!\lambda\int_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda v}dv = 7!.$$

Donc

$$f_V(v) = \frac{\lambda^8}{7!} v^7 e^{-\lambda v}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(v) \quad \text{et} \quad f_W(w) = 140 w^3 (1-w)^3 \mathbf{1}_{[0,1]}(w).$$

Exercice 10

Soit g une fonction mesurable positive. On rappelle la densité de $\mathcal{N}(0,1)$: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on note $\Phi(x,y)$ le réel de $[0, 2\pi[$ vérifiant $x = R\cos\Phi(x,y)$, $y = R\sin\Phi(x,y)$ avec $R = \sqrt{x^2+y^2}$. On calcule

$$\mathbb{E}[g(R,\Phi)] = \int_{\mathbb{R}^2} g(\sqrt{x^2+y^2}, \Phi(x,y))\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy.$$

On fait le changement de variables $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\phi = \Phi(x,y)$. On a $dxdy = |r|drd\phi$. Le changement de variables est $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (r \geq 0, \phi \in [0, 2\pi[)$. On obtient

$$\mathbb{E}[g(R,\Phi)] = \int_{\mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[} g(r,\phi) \frac{1}{2\pi} r e^{-\frac{r^2}{2}} drd\phi.$$

La densité de (R,Φ) est $f_{(R,\Phi)}(r,\phi) = \frac{1}{2\pi} r e^{-\frac{r^2}{2}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(r) \mathbf{1}_{[0,2\pi[}(\phi)$. Les variables R et Φ sont donc indépendantes car la densité s'écrit comme un produit $fonction(r) \times fonction(\phi)$. On obtient les marginales en intégrant par rapport à l'autre variable. $f_R(r) = \int_{[0,2\pi[} f_{(R,\Phi)}(r,\phi) d\phi = r e^{-\frac{r^2}{2}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(r)$ et $f_\Phi(\phi) = \int_{\mathbb{R}_+} f_{(R,\Phi)}(r,\phi) dr = \frac{1}{2\pi} \mathbf{1}_{[0,2\pi[}(\phi)$

Exercice 11

On se donne $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. On note $Y := \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ et $Z := \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

1. *Loi de* (Y,Z). On a $\mathbb{P}(Y \geq y, Z \leq z) = 0$ si $y > z$. Sinon,

$$\mathbb{P}(Y \geq y, Z \leq z) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{y \leq X_i \leq z\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(y \leq X_i \leq z) = \mathbb{P}(y \leq X_1 \leq z)^n = (F(z) - F(y))^n,$$

   où F est la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0,1]$ et l'on note f sa densité. D'où la densité jointe $f_{(Y,Z)}(y,z) = n(n-1)f(y)f(z)(F(z)-F(y))^{n-2} = n(n-1)(z-y)^{n-2}\mathbf{1}_{[0,1]}(y)\mathbf{1}_{[0,1]}(z)\mathbf{1}_{\{y \leq z\}}$ (On obtient en dérivant par rapport à y puis z).

2. On a $1 - Y = 1 - \min_{1 \leq i \leq n} X_i = \max_{1 \leq i \leq n} \tilde{X}_i$, où $\tilde{X}_i = 1 - X_i$ est de loi uniforme sur $[0,1]$ et ces v.a. sont indépendantes. De même, $1 - Z = 1 - \max_{1 \leq i \leq n} X_i = \min_{1 \leq i \leq n} \tilde{X}_i$. Donc $(1-Y, 1-Z)$ a même loi que (Y,Z).

3. Pour toute fonction g borélienne positive,

$$\mathbb{E}\left[g\left(\frac{Y}{Z}\right)\right] = \int_0^1 \int_0^1 g\left(\frac{y}{z}\right) n(n-1)(z-y)^{n-2} \mathbf{1}_{\{y \leq z\}} dydz.$$

   On fait le changement de variable $u = \frac{y}{z}$ et $z = z$. On a $dydz = |z|dudz$. Le changement de bornes est $(0 \leq y \leq z \leq 1) \Leftrightarrow (0 \leq z \leq 1, 0 \leq u \leq 1)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[g\left(\frac{Y}{Z}\right)\right] &= \int_0^1 \int_0^1 g(u)\, n(n-1)\,(z-uz)^{n-2}\, zdudz \\ &= \int_0^1 g(u)\,(n-1)(1-u)^{n-2} \left(\int_0^1 nz^{n-1} dz\right) du \\ &= \int_0^1 g(u)\,(n-1)(1-u)^{n-2} du. \end{aligned}$$

   Ainsi la densité de $\frac{Y}{Z}$ est $f_{\frac{Y}{Z}}(u) = (n-1)(1-u)^{n-2}\mathbf{1}_{[0,1]}(u)$.

4. Soit g borélienne positive. On fait le changement de variable $u = \frac{1-z}{1-y}$, $v = y$. On a $dydz = |1-v|dudv$ et le changement de bornes $(0|ey \leq z \leq 1) \Leftrightarrow (0 \leq v \leq 1, 0 \leq u \leq 1)$. On obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[g\left(\frac{1-Z}{1-Y}, Y\right)\right] &= \int_0^1 \int_0^1 g\left(\frac{1-z}{1-y}, y\right) n(n-1)(z-y)^{n-2} \mathbf{1}_{\{y \leq z\}} dydz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 g(u,v) n(n-1)(1-v)^{n-2}(1-u)^{n-2}(1-v) dudv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 g(u,v)(n-1)(1-u)^{n-2} n(1-v)^{n-1} dudv. \end{aligned}$$

Le densité de $(\frac{1-Z}{1-Y}, Y)$ est donc $f_{\frac{1-Z}{1-Y},Y}(u,v) = (n-1)(1-u)^{n-2} n(1-v)^{n-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(u)\mathbf{1}_{[0,1]}(v)$. Les variables sont donc indépendantes (produit $fonction(u) \times fonction(v)$). On connaît déjà la densité de $\frac{1-Z}{1-Y}$, elle est donnée au point u par $(n-1)(1-u)^{n-2}\mathbf{1}_{[0,1]}(u)$ (en effet, $\frac{1-Z}{1-Y}$ a même loi que $\frac{Y}{Z}$ d'après 2.). Donc la densité de Y au point v est nécessairement $n(1-v)^{n-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(v)$.

Exercice 12

1. Pour $k \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = k, X_N \leq x) &= \mathbb{P}(N = k, X_k \leq x) = \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{k-1}\{X_i \leq a\} \cap \{X_k > a\} \cap \{X_k \leq x\}) \\ &= (\mathbb{P}(X_k \leq x) - \mathbb{P}(X_k \leq a))\prod_{i=1}^{k-1}\mathbb{P}(X_i \leq a) = (F(x) - F(a))F(a)^{k-1}. \end{aligned}$$

On peut déjà conclure que les variables sont indépendantes ($fonction(k) \times fonction(x)$). Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_N \leq x) &= \sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(\{X_N \leq x\} \cap \{N = k\}) = \sum_{k\geq 1}(F(x) - F(a))F(a)^{k-1} \\ &= (F(x) - F(a))\sum_{k\geq 0}F(a)^k = \frac{F(x) - F(a)}{1 - F(a)}. \end{aligned}$$

Nécessairement, $\mathbb{P}(N = k) = (1 - F(a))F(a)^{k-1}$ et $\mathbb{P}(N = k, X_N \leq x) = \mathbb{P}(X_N \leq x)\mathbb{P}(N = k)$.

2. La v.a. X_N est définie $\mathbb{P}$-$p.s.$ puisque $N < +\infty$ $\mathbb{P}$-$p.s.$ et pour $k \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(N = k, X_N \leq x) = \mathbb{P}(N = k, X_k \leq x).$$

On remarque que

$$\mathbb{P}(N = k, X_k \leq x) = (k-1)!\mathbb{P}(X_1 \leq \cdots \leq X_{k-1} \leq X_0 \leq X_k \leq x).$$

On a aussi

$$\mathbb{P}(X_1 \leq \cdots \leq X_{k-1} \leq X_0 \leq X_k \leq x) = \frac{1}{(k+1)!}\mathbb{P}(X_0 \leq x, \ldots, X_k \leq x) = \frac{F(x)^{k+1}}{(k+1)!}$$

puisque les X_i sont indépendants et de fonction de répartition F, et on obtient finalement

$$\mathbb{P}(N = k, X_N \leq x) = \frac{(k-1)!}{(k+1)!}F(x)^{k+1} = \frac{F(x)^{k+1}}{k(k+1)}.$$

On a $\{X_N \leq x\} = \bigcup_{k\geq 1}\{X_N \leq x, N = k\}$, réunion d'événements deux à deux disjoints. D'où

$$\mathbb{P}(X_N \leq x) = \sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(X_N \leq x, N = k) = \sum_{k\geq 1}\frac{F(x)^{k+1}}{k(k+1)}.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) < 1$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_N \leq x) &= F(x)\sum_{k\geq 1}\frac{F(x)^k}{k} - \sum_{k\geq 1}\frac{F(x)^{k+1}}{k+1} \\ &= -F(x)\log(1 - F(x)) + F(x) + \log(1 - F(x)) = F(x) + (1 - F(x))\log(1 - F(x)). \end{aligned}$$

Exercice 13
Soit g une fonction mesurable positive. On a

$$\mathbb{E}[g(X_{(1)},\ldots,X_{(n)})] = \sum_{\sigma\in S_n} \mathbb{E}[g(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(n)})\mathbf{1}_{\{X_{\sigma(1)}<X_{\sigma(2)}<\ldots<X_{\sigma(n)}\}}].$$

Or $\mathbb{E}[g(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(n)})\mathbf{1}_{\{X_{\sigma(1)}<X_{\sigma(2)}<\ldots<X_{\sigma(n)}\}}] = \mathbb{E}[g(X_1,\ldots,X_n)\mathbf{1}_{\{X_1<X_2<\ldots<X_n\}}]$. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X_{(1)},\ldots,X_{(n)})] &= n!\mathbb{E}[g(X_1,\ldots,X_n)\mathbf{1}_{\{X_1<X_2<\ldots<X_n\}}] \\ &= n!\int_{\mathbb{R}^n} g(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mathbf{1}_{\{x_1<x_2<\ldots<x_n\}}\prod_{i=1}^n f(x_i)dx_1dx_2\ldots dx_n. \end{aligned}$$

La densité de $(X_{(1)},X_{(2)},\ldots,X_{(n)})$ est donc $n!\mathbf{1}_{\{x_1<x_2<\ldots<x_n\}}\prod_{i=1}^n f(x_i)$.

Exercice 14
On remarque que $\{N(t)=n\} = \{S_n \le t < S_{n+1}\}$..

1. *Loi de* $(S_1,\ldots,S_n)$. Soit g une fonction borélienne positive définie sur $\mathbb{R}^n$. Puisque les v.a. $X_1,\ldots,X_n$ sont indépendantes, on a

$$\mathbb{E}[g(S_1,\ldots,S_n)] = \int_{\mathbb{R}_+^n} g(x_1,x_1+x_2,\ldots,x_1+\cdots+x_n)\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i}dx_1\cdots dx_n.$$

On effectue le changement de variable $s_i = x_1+\cdots+x_i$, $i=1,\ldots,n$ de Jacobien 1. Le changement de bornes est $(x_1\ge 0, x_2\ge 0,\ldots,x_n\ge 0) \Leftrightarrow (0\le s_1\le s_2\le\ldots\le s_n)$. On obtient

$$\mathbb{E}[g(S_1,\ldots,S_n)] = \int_{\mathbb{R}_+^n} g(s_1,s_2,\ldots,s_n)\lambda^n e^{-\lambda s_n}\mathbf{1}_{\{s_1<\cdots<s_n\}}ds_1\cdots ds_n.$$

D'où la densité de $(S_1,\ldots,S_n)$: $f_{(S_1,\ldots,S_n)}(s_1,s_2,\ldots,s_n) = \lambda^n e^{-\lambda s_n}\mathbf{1}_{\{0<s_1<\cdots<s_n\}}$.

Loi de S_n. Il nous suffit d'intégrer cette densité en ses $n-1$ premières variables pour obtenir la densité de la loi de S_n. Ainsi,

$$\begin{aligned} f_{S_n}(s_n) &= \int_{\{0<s_1<\cdots<s_n\}} \lambda^n\exp(-\lambda s_n)ds_1\cdots ds_{n-1} \\ &= \lambda^n\exp(-\lambda s_n)\int_{\{0<s_1<\cdots<s_n\}} ds_1\cdots ds_{n-1} \\ &= \lambda^n\exp(-\lambda s_n)\frac{1}{(n-1)!}\int_{[0,s_n]^{n-1}} ds_1\cdots ds_{n-1} \end{aligned}$$

(dans la dernière égalité on intègre sur le carré tout entier, et l'on divise par le nombre de façons d'ordonner $n-1$ nombres, soit $(n-1)!$). On obtient finalement,

$$f_{S_n}(s_n) = \frac{s_n^{n-1}}{(n-1)!}\lambda^n\exp(-\lambda s_n)\mathbf{1}_{\{s_n>0\}}.$$

A retenir. Pour s et n fixés, on a $\int_{0\le s_1\le s_2\ldots\le s_n\le s} ds_1\ldots ds_n = \frac{1}{n!}s^n$.

2. La loi conditionnelle de $(S_1, \ldots, S_n)$ sachant $N(t) = n$ est définie par $\mathbb{P}((S_1, \ldots, S_n) \in A | N(t) = n)$ pour tout borélien de $\mathbb{R}^n$. Or

$$\mathbb{P}((S_1, \ldots, S_n) \in A | N(t) = n) = \frac{\mathbb{P}((S_1, \ldots, S_n) \in A, N(t) = n)}{\mathbb{P}(N(t) = n)}.$$

Soit g une fonction mesurable positive. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(S_1, \ldots, S_n)\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}}] &= \mathbb{E}[g(S_1, \ldots, S_n)\mathbf{1}_{\{S_n \le t < S_{n+1}\}}] \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} g(s_1, s_2, \ldots, s_n)\lambda^{n+1} e^{-\lambda s_{n+1}} \mathbf{1}_{\{0<s_1<\cdots<s_n \le t < s_{n+1}\}} ds_1 \cdots ds_{n+1} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(s_1, s_2, \ldots, s_n)\lambda^n \mathbf{1}_{\{0<s_1<\cdots<s_n \le t\}} ds_1 \cdots ds_n \left(\int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s_{n+1}} ds_{n+1} \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(s_1, s_2, \ldots, s_n)\lambda^n e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{\{0<s_1<\cdots<s_n \le t\}} ds_1 \cdots ds_n
\end{aligned}$$

En prenant $g = 1$, on trouve $\mathbb{P}(N(t) = n) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^n e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{\{0<s_1<\cdots<s_n \le t\}} ds_1 \cdots ds_n = \frac{1}{n!}(\lambda t)^n e^{-\lambda t}$. En particulier, $N(t)$ est une v.a. de Poisson de paramètre λt. On obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(S_1, \ldots, S_n) \mid N(t) = n] &= \frac{\mathbb{E}[g(S_1, \ldots, S_n)\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}}]}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(s_1, s_2, \ldots, s_n) t^{-n} \mathbf{1}_{\{0<s_1<\cdots<s_n \le t\}} ds_1 \cdots ds_n.
\end{aligned}$$

La densité de $(S_1, \ldots, S_n)$ sachant $\{N(t) = n\}$ est donc $n! t^{-n} \mathbf{1}_{\{0<s_1<\cdots<s_n \le t\}}$ qui est la densité de la statistique d'ordre $(U_{(1)}, \ldots, U_{(n)})$ de n v.a. i.i.d de loi uniforme sur $[0, t]$ (pour le voir, il suffit d'appliquer le résultat de l'Exercice 13 avec $f(x) = \frac{1}{t}\mathbf{1}_{[0,t]}(x)$).

Exercice 15

D'après l'Exercice 14, la densité de $(S_1, \ldots, S_n)$ est $f_{(S_1,\ldots,S_n)}(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \lambda^n e^{-\lambda s_n} \mathbf{1}_{\{0<s_1<\cdots<s_n\}}$. Ainsi pour toute fonction borélienne positive g définie sur $\mathbb{R}^{n-1}$,

$$\mathbb{E}\left[g\left(\frac{S_1}{S_n}, \ldots, \frac{S_{n-1}}{S_n}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}^n} g\left(\frac{s_1}{s_n}, \ldots, \frac{s_{n-1}}{s_n}\right) \lambda^n e^{-\lambda s_n} \mathbf{1}_{\{0<s_1<\cdots<s_n\}} ds_1 \cdots ds_n.$$

On fait le changement de variables $u_i = \frac{s_i}{s_n}$, $i = 1, \ldots, n-1$, $u_n = s_n$. On a $ds_1 ds_2 \ldots ds_n = |u_n^{n-1}| du_1 \ldots du_n$, et le changement de bornes est $(0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_n) \Leftrightarrow (0 \le u_1 \le \ldots \le u_{n-1} \le 1, u_n \ge 0)$. On obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g\left(\frac{S_1}{S_n}, \ldots, \frac{S_{n-1}}{S_n}\right)\right] &= \int_{[0,1]^{n-1}} \int_{\mathbb{R}_+} g(u_1, \ldots, u_{n-1}) \lambda^n u_n^{n-1} e^{-\lambda u_n} \mathbf{1}_{\{0<u_1<\cdots<u_{n-1}<1\}} du_1 \cdots du_n \\
&= \int_{[0,1]^{n-1}} g(u_1, \ldots, u_{n-1}) \mathbf{1}_{\{0<u_1<\cdots<u_{n-1}<1\}} du_1 \cdots du_{n-1} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \lambda^n u_n^{n-1} e^{-\lambda u_n} du_n \right) \\
&= (n-1)! \int_{[0,1]^{n-1}} g(u_1, \ldots, u_{n-1}) \mathbf{1}_{\{0<u_1<\cdots<u_{n-1}<1\}} du_1 \cdots du_{n-1}
\end{aligned}$$

car $\frac{\lambda^n u_n^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda u_n} du_n \mathbf{1}_{\{u_n>0\}}$ est la densité de S_n (voir Exercice 13). Ainsi la densité de $\left(\frac{S_1}{S_n}, \ldots, \frac{S_{n-1}}{S_n}\right)$ est $f(u_1, \ldots, u_{n-1}) = (n-1)! \mathbf{1}_{\{0<u_1<\cdots<u_{n-1}<1\}}$ qui est, d'après l'Exercice 13, la densité de la statistique d'ordre $(U_{(1)}, \ldots, U_{(n-1)})$ de $n-1$ v.a. i.i.d de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 16

1. *Loi de* N. Pour $n \geq 1$, on a $\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{P}(N > n-1) - \mathbb{P}(N > n)$. Or $N > n$ si et seulement si les v.a. $X_{m+1}, \ldots, X_{m+n}$ sont toutes strictement supérieures à $X_{(m)}$. Puisque les v.a. $X_1, \ldots, X_{m+n}$ sont indépendantes et de même loi continue, tous les classement possibles par ordre croissnat de ces v.a. sont équiprobables (voir Exercice 2 et 12) : pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, \ldots, m+n\}$, on a
$$\mathbb{P}(X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(m+n)}) = \frac{1}{(m+n)!}.$$
Comme il y a exactement $m(m+n-1)!$ classements possibles de ces v.a. de façon que $X_{m+1}, \ldots, X_{m+n} < X_{(m)} = \max\{X_1, \ldots, X_m\}$ ($X_{(m)}$ peut être soit X_1,..., soit X_m, puis il reste à ranger les $m+n-1$ v.a. restantes), on a
$$\mathbb{P}(N > n) = \frac{m(m+n-1)!}{(m+n)!} = \frac{m}{m+n}.$$
D'où $\mathbb{P}(N = n) = \frac{m}{m+n-1} - \frac{m}{m+n}$.
2. On a de même, pour $n \geq 1$, on a $\mathbb{P}(N_r = n) = \mathbb{P}(N_r > n-1) - \mathbb{P}(N_r > n)$. Or $N_r > n$ si et seulement si les v.a. $X_{m+1}, \ldots, X_{m+n}$ sont toutes strictement supérieures à $X_{(m-r+1)}$. Ceci signifie que les r plus grandes valeurs parmi $X_1, \ldots, X_{m+n}$ figurent parmi les $X_1, \ldots, X_m$. Il y a C_m^r choix de r variables parmi m, $r!$ ordres possibles pour celles-ci et $(m+n-r)!$ ordres possibles pour les $m+n-r$ restantes ; d'où
$$\mathbb{P}(N_r > n) = \frac{C_m^r r!}{(m+n)!(m+n-r)!} = \frac{C_m^r}{C_{m+n}^r}.$$
D'où $\mathbb{P}(N_r = n) = \frac{C_m^r}{C_{m+n-1}^r} - \frac{C_m^r}{C_{m+n}^r}$.