

Série d'exercices N°5

Exercice 1

Soit (X, Y) un vecteur gaussien centré, avec $E(X^2) = 4$ et $E(Y^2) = 1$, et tel que les variables $2X + Y$ et $X - 3Y$ sont indépendantes.

- 1) Déterminer la matrice de covariance de (X, Y) .
- 2) Montrer que le vecteur $(X + Y, 2X - Y)$ est également gaussien, puis déterminer sa matrice de covariance.

Exercice 2

Soit $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur gaussien. On pose $U = X + Y + Z$ et $V = X - Y$.

- 1) Montrer que $(U, V) \in \mathbb{R}^2$ est gaussien.
- 2) A quelle condition sur la matrice de covariance de (X, Y, Z) les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 3

Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur gaussien centré. On donne $E(X_1^2) = a$, $E(X_1 X_2) = b$ et $E(X_2^2) = c$.

- 1) Calculer la matrice de covariance et la fonction caractéristique de X .
- 2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c) pour que cette loi possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 et déterminer cette densité.

Exercice 4

Soit $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur gaussien d'espérance $(1, 1, 1)^t$ et de matrice de covariance $2I_3$. Le vecteur $(X + 2Y + Z, 2X - Y + Z + 2)$ est-il gaussien ? Déterminer sa loi.

Exercice 5

Soit $X \in \mathbb{R}^3$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 1) X possède-t-il une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^3 ? Si oui donner son expression.

2) Trouver un opérateur linéaire $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que les composantes du vecteur $A \cdot X$ soient des variables indépendantes.

3) Déterminer la loi de $X_1 + 2X_2 - X_3$ où $X = (X_1, X_2, X_3)$.

Exercice 6

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, I_n)$.

1) Déterminer la loi de X_1^2 .

2) Déterminer les lois de $(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2)$ et de $\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}$.

3) Soit Y une v.a. telle que (X_1, \dots, X_n, Y) soit un vecteur gaussien de \mathbb{R}^{n+1} de loi $\mathcal{N}(0, I_{n+1})$.

Déterminer la loi de la variable

$$\frac{Y}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}}.$$

Exercice 7

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire gaussien, centré, réduit, $\mathcal{N}(0, I_n)$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose $Y_i = X_1 + \dots + X_i - X_{i+1}$ (avec la convention $X_{n+1} = 0$). Les v.a. Y_1, \dots, Y_n sont-elles indépendantes ?

Exercice 8

1) Soit $a \in [-\pi/4, \pi/4]$. Déterminer le carré de la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

2) Soit Q la loi gaussienne sur \mathbb{R}^2 , centrée, dont la matrice de covariance est

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin 2a \\ \sin 2a & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que Q est la loi image de la loi gaussienne centrée réduite $\mathcal{N}(0, I_2)$ sur \mathbb{R}^2 par une application linéaire A dont on donnera la matrice.

3) Soit $Y = (Y_1, Y_2)$ un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^2 dont la loi est Q . Déterminer l'espérance de Y_1^n , où n est un entier naturel quelconque.

Exercice 9

Existe-t-il un vecteur gaussien de \mathbb{R}^3 dont la matrice de covariance est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} ?$$

Exercice 10

1) Soit (G_1, G_2) un vecteur gaussien 2-dimensionnel, centré. Montrer que :

$$E[\exp i(G_1 + G_2)] = E[\exp iG_1] E[\exp iG_2],$$

si et seulement si : G_1 et G_2 sont indépendantes.

2) Donner un exemple de vecteur gaussien 3-dimensionnel, centré, (G_1, G_2, G_3) tel que

$$E[\exp i(G_1 + G_2 + G_3)] = \prod_{k=1}^3 E[\exp i(G_k)] \text{ et les variables } G_1, G_2, G_3 \text{ ne sont pas indépendantes.}$$

3) Soit (G_1, G_2, G_3) un vecteur gaussien 3-dimensionnel centré tel que pour tout $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, on ait :

$$E\left[\exp\left(i\sum_{k=1}^3 a_k G_k\right)\right] = \prod_{k=1}^3 E[\exp(ia_k G_k)].$$

Les variables G_1, G_2, G_3 sont-elles indépendantes ?

Exercice 11

Soit X un vecteur gaussien de matrice de covariance

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

Déterminer l'ensemble des matrices $A \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $X = AN$ où N est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance I_3 .