Corrigé des exercices de la feuille n^o 5

Exercice 1. 1) Puisque X et Y sont centrés, les données de l'énoncé entraînent que $\mathrm{Var}(X) = 4$ et que $\mathrm{Var}(Y) = 1$. Il reste à déterminer $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Puisque les v.a. $2X + Y$ et $X - 3Y$ sont indépendantes, leur covariance est nulle. Donc

$$0 = \mathrm{Cov}(2X + Y, X - 3Y) = 2\mathrm{Var}(X) - 3\mathrm{Var}(Y) - 5\mathrm{Cov}(X, Y),$$

ce qui donne $\mathrm{Cov}(X, Y) = 1$ et

$$K_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Toute combinaison linéaire de $X + Y$ et $2X - Y$ est aussi une combinaison linéaire de X et Y, donc c'est une gaussienne, puisque le vecteur (X, Y) est gaussien. On peut aussi dire que le vecteur $(X+Y, 2X-Y)$ est gaussien puisqu'il est l'image par une application linéaire du vecteur gaussien (X, Y). En effet

$$\begin{pmatrix} X + Y \\ 2X - Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir sa matrice de covariance, on calcule successivement

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) = 4 + 1 + 2 = 7,$$

$$\mathrm{Var}(2X - Y) = 4\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 4\mathrm{Cov}(X, Y) = 16 + 1 - 4 = 13$$

et

$$\mathrm{Cov}(X + Y, 2X - Y) = 2\mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Cov}(X, Y) = 8 - 1 + 1 = 8.$$

On a donc

$$K_{(X+Y,2X-Y)} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

Remarque : On peut aussi écrire $K_{(X+Y,2X-Y)} = A\, K_{(X,Y)}\, {}^tA$ et effectuer le produit de matrices.

Exercice 2. 1) On procède comme à la question 1 de l'exercice 1 : par exemple, le vecteur (U, V) est l'image par une application linéaire (de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$) du vecteur gaussien (X, Y, Z).

2) Puisque le vecteur (U, V) est gaussien, on sait d'après le cours que les v.a. U et V sont indépendantes si et seulement si $\mathrm{Cov}(U, V) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Cov}(X, Z) - \mathrm{Cov}(Y, Z) = 0$.

Exercice 3. 1) Puisque X est centré, sa matrice de covariance est

$$K = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

et sa fonction caractéristique est

$$\varphi(t_1, t_2) = \exp\left(-\frac{1}{2}(t_1, t_2) K \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}\right) = e^{-\frac{1}{2}(at_1^2 + 2bt_1t_2 + ct_2^2)}.$$

2) D'après le cours, cette loi possède une densité si et seulement si K est inversible, c'est-à-dire si et seulement si $ac - b^2 \neq 0$, et dans ce cas sa densité est

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det K}} e^{-\frac{1}{2}{}^t x K^{-1} x} = \frac{1}{2\pi\sqrt{ac - b^2}} e^{-\frac{1}{2(ac-b^2)}(cx_1^2 - 2bx_1x_2 + ax_2^2)}.$$

Remarque : On a $ac - b^2 \geq 0$ puisqu'une matrice de covariance est toujours symétrique positive, ou bien en appliquant l'inégalité de Schwarz $|E(X_1X_2)|^2 \leq E(X_1^2)E(X_2^2)$. Donc, s'il y a une densité, on a $ac - b^2 > 0$.

Exercice 4. Les combinaisons linéaires des composantes du vecteur $(X+2Y+Z, 2X-Y+Z+2)$ sont de la forme $\lambda(X+2Y+Z) + \mu(2X-Y+Z+2) = (\lambda+2\mu)X + (2\lambda-\mu)Y + (\lambda+\mu)Z + 2\mu$. Puisque le vecteur (X, Y, Z) est gaussien, elles sont donc de la forme $N + C$, où N est une v.a.r. gaussienne et C une constante. Or, si N est gaussienne, alors $N+C$ est gaussienne, donc le vecteur $(X+2Y+Z, 2X-Y+Z+2)$ est gaussien. On a $E(X+2Y+Z) = E(X)+2E(Y)+E(Z) = 4$ et $E(2X-Y+Z+2) = 4$. Puisque le vecteur (X, Y, Z) est gaussien et que sa matrice de covariance est diagonale, les v.a.r. X, Y et Z sont indépendantes. Donc

$$\mathrm{Var}(X + 2Y + Z) = \mathrm{Var}(X) + 4\mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(Z) = 12,$$

$$\mathrm{Var}(2X - Y + Z + 2) = \mathrm{Var}(2X - Y + Z) = 4\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(Z) = 12$$

et

$$\mathrm{Cov}(X + 2Y + Z, 2X - Y + Z + 2) = 2\mathrm{Var}(X) - 2\mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(Z) = 2.$$

Conclusion :

$$\begin{pmatrix} X + 2Y + Z \\ 2X - Y + Z + 2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}\right).$$

On peut aussi remarquer que

$$\begin{pmatrix} X + 2Y + Z \\ 2X - Y + Z + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{pmatrix} X + 2Y + Z \\ 2X - Y + Z + 2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, A 2 I_3 {}^t A\right).$$

Exercice 5. 1) On trouve $\det Q = 16$ et

$$Q^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

donc le vecteur X admet la densité

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det Q}} e^{-\frac{1}{2}{}^t x Q^{-1} x} = \frac{1}{8\pi} e^{-\frac{1}{16}(3x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2)}.$$

2) Pour toute application linéaire $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, le vecteur $Y = AX$ est gaussien et sa matrice de covariance est $K_Y = AK_X {}^t A = AQ {}^t A$. D'autre part, d'après le cours, puisque Y est gaussien, ses composantes sont des v.a. indépendantes si et seulement si sa matrice de covariance est diagonale.

Il s'agit donc de trouver une matrice A telle que $AQ\,{}^tA$ soit diagonale, c'est–dire de diagonaliser la matrice Q de façon que la matrice de passage soit orthogonale (${}^tP = P^{-1}$), ce qui est possible puisque les matrices symétrique sont diagonalisables en base orthonormée.

Calcul des valeurs propres : En développant par rapport à la dernière colonne, on trouve

$$\det(Q - \lambda I) = (2-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 1] = (2-\lambda)^2(4-\lambda).$$

Les valeurs propres sont donc 2 (valeur propre double) et 4.

Calcul des vecteurs propres :

$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} 3x - y & = & 2x \\ -x + 3y & = & 2y \\ 2z & = & 2z \end{array}\right. \iff x - y = 0.$$

Une base orthonormée de ce plan est composée des vecteurs

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Un système d'équations du sous-espace propre associé à la valeur propre 4 est $x + y = 0$, $z = 0$. Un vecteur unitaire est $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Il est automatiquement orthogonal aux deux précédents puisque Q est symétrique. La matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

correspond à un changement de base orthonormée et est donc orthogonale. Puisque $P^{-1}QP = D$, on peut prendre

$$A = P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Puisque le vecteur X est gaussien, toutes les combinaisons linéaires de ses composantes, et en particulier $X_1 + 2X_2 - X_3$, sont des v.a.r. gaussiennes. Il suffit donc de déterminer son espérance et sa variance. Or $E(X_1 + 2X_2 - X_3) = E(X_1) + 2E(X_2) - E(X_3) = 0$ puisque X est centrée et

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_1 + 2X_2 - X_3) &= \mathrm{Var}(X_1) + 4\mathrm{Var}(X_2) + \mathrm{Var}(X_3) + 4\mathrm{Cov}(X_1, X_2) - 2\mathrm{Cov}(X_1, X_3) - 4\mathrm{Cov}(X_2, X_3) \\ &= 3 + 12 + 2 - 4 = 13,\end{aligned}$$

donc $X_1 + 2X_2 - X_3 \sim \mathcal{N}(0, 13)$.

Exercice 6. 1) Soit f borélienne bornée, en faisant le changement de variable $y = x^2$ dans l'expression $E(f(X_1^2)) = \int_{\mathbb{R}} f(x^2)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$, on obtient $E(f(X_1^2)) = \int_0^{+\infty} f(y)y^{-1/2}\frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dy$, d'où la densité de X_1 : $y^{-1/2}\frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathbb{1}_{\{y\in[0,+\infty)\}}$. La v.a. X_1 suit une loi Gamma de paramètres $1/2$ et $1/2$.

2) La matrice du vecteur $(X_1, \cdots, X_n)$ étant diagonale, ses coordonnées sont indépendantes, ainsi

que les v.a. $X_1^2, \cdots, X_n^2$. On montre alors, en réitérant le calcul fait à l'exercice 14, question 2), feuille d'exercices 3, que la somme $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ suit une loi gamma de paramètres $n/2$ et $1/2$, c'est à dire une loi de densité $y^{(n-2)/2} \frac{e^{-y/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} 1\!\!1_{\{y \in [0,+\infty)\}}$. On peut aussi utiliser les fonctions caractéristiques : la fonction caractéristique de la loi gamma de paramètres $1/2, 1/2$ est donnée par

$$\varphi_{X_1^2}(t) = \left(\frac{1/2}{1/2 - it} \right)^{1/2},$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par indépendance des v.a. $X_1^2, \ldots, X_n^2$, on a alors

$$\varphi_{X_1^2 + \cdots + X_n^2}(t) = (\varphi_{X_1^2}(t))^n = \left(\frac{1/2}{1/2 - it} \right)^{n/2}.$$

On reconnaît alors la fonction caractéristique de la loi gamma de paramètres $n/2$ et $1/2$.
Remarque : La loi gamma de paramètres $n/2$ et $1/2$ est encore appelée loi du chi-deux à n degrés de liberté.

En faisant le changement de variable $z = \sqrt{y}$ dans l'expression

$$E(f(\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2})) = \int_0^{+\infty} f(\sqrt{y}) y^{(n-2)/2} \frac{e^{-y/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\, dy\,,$$

on obtient :

$$E(f(\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2})) = \int_0^{+\infty} f(z) z^{n-1} \frac{e^{-z^2/2}}{2^{(n-2)/2}\Gamma(n/2)}\, dz,$$

d'où la densité de $\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}$: $z^{n-1} \frac{e^{-z^2/2}}{2^{(n-2)/2}\Gamma(n/2)} 1\!\!1_{\{z \in [0,+\infty)\}}$.
3) Pour les mêmes raisons qu'à la question 1), les v.a. $X_1, \cdots, X_n, Y$ sont indépendantes, ce qui entraîne l'indépendance entre $\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}$ et Y. Soit f borélienne bornée, alors on a $E(f(Y/\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2})) = \int_{[0,\infty)^2} f(y/z) \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} z^{n-1} \frac{e^{-z^2/2}}{2^{(n-2)/2}\Gamma(n/2)}\, dy\, dz$. En posant $z = u$ et $y/z = v$, on obtient $E(f(Y/\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2})) = \int_0^{\infty} f(v) \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)(1+v^2)^{(n+1)/2}}\, dv$, d'où la densité de $Y/\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}$: $\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)(1+v^2)^{(n+1)/2}} 1\!\!1_{\{v \in [0,+\infty)\}}$.

Exercice 7. Le vecteur Y est l'image du vecteur X par la transformation linéaire de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & 1 & -1 \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 \end{pmatrix}.$$

Sa matrice de covariance est alors donnée par $AI_n{}^tA = A^tA$. On vérifie facilement que celle-ci n'est pas diagonale, et donc que les coordonnées de Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 8. 1) La matrice $\begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$ a pour carré $\begin{pmatrix} 1 & \sin 2a \\ \sin 2a & 1 \end{pmatrix}$.
2) Soit A la matrice de l'application linéaire A et K_Q la matrice de covariance de la loi Q.

Alors la matrice A doit vérifier la relation $K_Q = AI_n{}^tA = A^tA$ et d'après la question 1), on a $A = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$.

3)

$$\begin{aligned} E(Y_1^n) &= \int_{\mathbb{R}^2} (y_1)^n \, dQ(y) \\ &= \int_{A^{-1}(\mathbb{R}^2)} ((Ax)_1)^n \frac{e^{-(x_1^2+x_2^2)/2}}{2\pi} \, dx_1 \, dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (x_1 \cos a + x_2 \sin a)^n \frac{e^{-(x_1^2+x_2^2)/2}}{2\pi} \, dx_1 \, dx_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r^{n+1} e^{-r^2/2} \, dr \int_0^{2\pi} (\cos(\theta - a))^n \, d\theta \,, \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient d'un changement de variables en coordonnées polaires. Posons $I_n = \int_0^{2\pi} (\cos(\theta - a))^n \, d\theta$, alors pour tout $k \geq 1$, $I_{2k+1} = 0$ et $I_{2k} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2k} \, d\theta = \frac{2}{k!} \sqrt{\pi} \Gamma(k + 1/2) = 4 \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \frac{\pi}{2}$ (intégrale de Wallis). D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^{2k+1} e^{-r^2/2} \, dr &= \int_0^\infty 2^k s^k e^{-s} \, ds \\ &= 2^k k! \,. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $k \geq 1$, on a $E(Y_1^{2k+1}) = 0$ et $E(Y_1^{2k}) = \frac{(2k)!}{k! 2^k}$.

Exercice 9. Non car la matrice donnée n'est pas définie positive, son déterminant n'étant pas positif.

Exercice 10. 1) Soit $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ la matrice de covariance de (G_1, G_2), alors on vérifie facilement que :

$$\begin{aligned} E(e^{i(G_1+G_2)}) &= \exp\left(-1/2 < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} >\right) \\ &= \exp(-1/2(2c + a + b)) \,. \end{aligned}$$

D'autre part, on a $E(e^{G_1})E(e^{G_2}) = \exp(-1/2(a + b))$. En identifiant ces deux expressions, on obtient que la covariance c entre G_1 et G_2 est nulle, ce qui signifie, puisque le vecteur (G_1, G_2) est gaussien, que G_1 et G_2 sont indépendantes. La réciproque est évidente.

2) Notons (a) la condition $E(e^{i(G_1+G_2+G_3)}) = E(e^{iG_1})E(e^{iG_2})E(e^{iG_3})$. Soit $\begin{pmatrix} a & e & f \\ e & b & g \\ f & g & c \end{pmatrix}$ la matrice de covariance de (G_1, G_2, G_3), alors,

$$\begin{aligned} E(e^{i(G_1+G_2+G_3)}) &= \exp\left(-1/2 < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & e & f \\ e & b & g \\ f & g & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >\right) \\ &= \exp(-(a + b + c + 2(e + f + g))/2) \,. \end{aligned}$$

D'autre part, $E(e^{iG_1})E(e^{iG_2})E(e^{iG_3}) = e^{-(a+b+c)/2}$. La condition (a) nécessite donc que $e+f+g = \mathrm{cov}(G_1,G_2)+\mathrm{cov}(G_1,G_3)+\mathrm{cov}(G_2,G_3) = 0$. Soit alors X une v.a. gaussienne, centrée, quelconque. Posons $G_1 = X$, $G_2 = aX$ et $G_3 = bX$ où $a,b \in \mathbb{R}$ sont à déterminer. L'égalité ci-dessus donne $(a+b+ab)\mathrm{Var}(X) = 0$, c'est à dire $a+b+ab = 0$. La condition (a) est réalisée dans ce cas pour tous a et b tels que $b = -a/(a+1)$. D'autre part, il est évident que G_1, G_2 et G_3 ne sont pas indépendantes.
3) Pour tout $(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3$, on a d'une part

$$E(e^{i(a_1G_1+a_2G_2+a_3G_3)}) = \exp\left(-1/2 < \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & e & f \\ e & b & g \\ f & g & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} > \right),$$

et d'autre part, $E(e^{ia_1G_1})E(e^{ia_2G_2})E(e^{ia_3G_3}) = e^{-(a_1^2a+a_2^2b+a_3^2c)/2}$. En identifiant ces deux expressions, on montre que $ea_1a_2 + fa_1a_3 + ga_3a_2 = 0$, pour tous a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$. Ceci entraîne alors que nécessairement, on doit avoir $e = f = g = 0$. Ainsi, (G_1,G_2,G_3) est un vecteur gaussien dont la matrice de covariance est diagonale, ses coordonnées sont donc indépendantes.

Exercice 11. Comme les deux vecteurs sont centrés on a égalité des deux vecteurs lorsque les matrices de covariance sont égales ce qui se traduit par :

$$A.{}^tA = \mathrm{Cov}(X) = V.$$

V étant une matrice de covariance, elle est définie positive. Son déterminant étant strictement positif, elle est strictement définie positive. Elle définie donc un produit scalaire. Par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, on trouve $V = {}^tP.P$, où

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, $A.{}^tA = {}^tP.P$ équivaut à $[{}^t(P^{-1})A].{}^t[{}^t(P^{-1})A] = I$, c'est à dire $[{}^t(P^{-1})A]$ est orthogonale. L'ensemble des matrices A cherchées est donc $\{A \in M_n(\mathbb{R})\,\text{telles que}\,\exists\, U \in O_n(\mathbb{R}),\ A = {}^tP.U\}$.