**Université Paris Diderot**
**Université Pierre et Marie Curie** **2013 - 2014**
**Master MEF premiére année**
Fabrice Vandebrouck, vandebro@univ-paris-diderot.fr
Francoise Hérault, herault.francoise@orange.fr

# TD 1 - Suites numériques : première partie

Dans chacun des exercices, on étudiera le comportement des suites proposées - on pourra commencer par une observation expérimentale de ce comportement - et on s'interrogera sur l'intéret de proposer ces suites à des élèves, les adaptions à faire, les énoncés à rédiger compte tenu des programmes d'enseignement. Selon les cas, l'entier $n$ est supérieur strict ou non à 0.

**Exercice 1.** les programmes
En étudiant les programmes du lycée, mettre en évidence les résultats du cours d'Analyse qui sont démontrés ou admis aux différents niveaux d'enseignement. Lorsque les résultats sont démontrés, produire les démonstrations correspondantes aux niveaux d'enseignement.

**Exercice 2.** la transition Algèbre / Analyse. On cherchera à donner deux preuves des convergences éventuelles, l'une en appliquant des règles algébriques et l'autre purement Analyse.

1. $x_n = \frac{1}{n}$
2. $U_n = q^n \quad \text{avec} \quad q \in \mathbb{R}$
3. $V_n = n^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$
4. $W_n = n!$
5. $A_n = 3n^2 + n - 5$
6. $R_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
7. $S_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$
8. $T_n = T_{n-1} + \dfrac{1}{2^n} \quad T_0 = 0$ (paradoxe de Zénon)

**Exercice 3.** introduction aux suites numériques
Déterminer des suites numériques dont les premiers termes sont

1. $1 - 3 - 6 - 10 \cdots$ nombres triangulaires
2. $1 - 3 - 9 - 27 \cdots$
3. $0 - 1 - 3 - 7 \cdots$
4. $1 - 2 - 6 - 24 \cdots$
5. $2 - 3 - 5 - 7 \cdots$

Voir si vous pouvez étudier le comportement des suites que vous proposez.

$$X_{n+1} = \frac{1}{2} X_n + \frac{1}{2^n}$$
$$U_{n+1} = U_n + \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

**Exercice 4.** Des erreurs typiques d'élèves - On cherchera à classifier les suites qui suivent en justifiant le classement.

1. $U_n = n + 4\sin(n)$
2. $V_n = (-1)^n$
3. $W_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
4. $T_n = \dfrac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n}$
5. $S_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
6. $A_n = 2013$
7. $B_n = \dfrac{n}{n^2 - 100n + 4}$
8. $C_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}$
9. $D_n = 1 + \dfrac{1}{1 + U_n} \quad D_0 = 1$

**Exercice 5.** Suites incontournables

1. $2U_{n+1} = U_n - 1 \quad U_0 = 1$
2. $V_{n+2} = \dfrac{3}{35}V_{n+1} + \dfrac{2}{35}V_n \quad V_0 = 3 \quad V_1 = -\dfrac{4}{35}$
3. $W_{n+1} = 4W_n - V_{n-1} \quad V_0 = 2 \quad V_1 = 4$
4. $R_{n+1} = \dfrac{1}{3}R_n + n - 1 \quad R_0 = 1$

**Exercice 6.** Suites classiques et TICE

1. Suites des aires et périmètres des Flocons de Von Koch
2. $U_0 = 1 \quad U_1 = k \in \mathbb{R} \quad U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$ - on pourra notamment prendre $k = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ puis un $k' = k + \epsilon$ et étudier la stabilité du comportement.
3. $V_{n+1} = V_n + 2n - 11$
4. Suites des intérets, amortissements, capital restant du...

**Exercice 7.** Suites classiques

1. Suite des sommes d'entiers, de carrés d'entiers, de cubes d'entiers
2. Suite de Héron (on réfléchira á différentes mises en situations)
3. $U_0 < V_0 \quad U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2V_n}{5} \quad V_{n+1} = \dfrac{2U_n + 3V_n}{5}$
4. Suite de Fibonacci

**Exercice 8.** Suites et logique, quantificateurs

On considére une suite $(U_n)$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite $(V_n)$ par $V_n = \dfrac{-2}{U_n}$. Statuer sur les propositions suivantes :

1. Si $(U_n)$ converge alors $(V_n)$ converge
2. Si $(U_n)$ est minoré par 2 alors $(V_n)$ est minoré par $-1$
3. Si $(U_n)$ est décroissante alors $(V_n)$ est croissante
4. Si $(U_n)$ est divergente alors $(V_n)$ converge vers 0

Si $(U_n)$ et $(V_n)$ sont deux suites arithmétiques (respectivement géométriques) que peut-on dire de la suite $(U_n + V_n)$ (respectivement $U_n \times V_n$) ?