Chapitre 1 : Nombres réels

L'histoire des nombres réels remonte l'antiquité grecque. A cette époque, seuls les entiers positifs ont le statut de nombre et une théorie des grandeurs permet de gérer le continu. Cette théorie élaborée par Eudoxe de Cnide au 5ème siècle avant J.C. et reprise dans le Livre 5 des Éléments d'Euclide permet de comparer et additionner des grandeurs, de comparer et multiplier des rapports de grandeurs de même nature. L'unification du domaine numérique sera longue et difficile : ce n'est qu'à la fin du 19ème siècle avec "l'arithmétisation de l'analyse" que seront élaborées des constructions du corps des réels partir des entiers et des rationnels dont les deux principales sont décrites ci-dessous.

1 Coupures de Dedekind et borne supérieure

Par opposition à l'algèbre qui traite des égalités, l'analyse consiste en la manipulation des inégalités, et la construction de Dedekind (1872) est principalement basée sur la relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$. L'irrationalité de $\sqrt{2}$, qui a longtemps intrigué les contemporains de Pythagore (6ème siècle avant J.C.), permet de montrer que l'ensemble :

$$A = \{ x \in \mathbb{Q} \,/\, x \leqslant 0 \text{ ou } x^2 < 2 \}$$

est non vide et majoré, mais que l'ensemble de ses majorants :

$$\mathcal{M}(A) = \{ y \in \mathbb{Q} \,/\, y \geqslant 0 \text{ et } y^2 \geqslant 2 \}$$

n'admet pas de plus petit élément, qui serait sinon par définition sa borne supérieure $\sup(A)$. Pour résoudre ce problème, Dedekind a défini une *coupure* comme une partition de $\mathbb{Q}$ en deux parties $(A\,,\,B)$ telles que :
- tout élément de A est (strictement) inférieur à tout élément de B
- la partie A n'admet pas de plus grand élément.

Ces coupures incluent en particulier les ensembles de la forme :

$$A_r = \{ x \in \mathbb{Q} \,/\, x < r \}$$

pour $r \in \mathbb{Q}$ qui s'identifient aux rationnels, mais il existe comme ci-dessus des coupures $(A\,,\,B)$ telles que B n'a pas de plus petit élément : on définit $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des coupures, et on montre que c'est un corps ordonné (avec les bonnes définitions, comme pour les constructions de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ comme quotients de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) qui possède en outre la *propriété de borne supérieure*, c'est à dire que toute partie **non vide** et **majorée** $A \subset \mathbb{R}$ admet une **borne supérieure** $\sup(A) \in \mathbb{R}$, qui est par définition son **plus petit majorant**. Elle est donc caractérisée par :
- pour tout $x \in A$, on a : $x \leqslant M$
- pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $x \in A$ tel que : $x > M - \varepsilon$

puisque c'est le seul réel $M = \sup(A)$ possédant ces deux propriétés.

2 Suites de Cauchy et complétude

La **distance** d sur l'ensemble $E = \mathbb{Q}$ est définie par : $d(x\,,\,y) = |\,x - y\,|$ et elle permet de considérer E comme un *espace métrique*. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E **converge** vers $\ell \in E$ si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tel que $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que :

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad d(u_n\,,\,\ell) \leqslant \varepsilon \quad ,$$

et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite de Cauchy** si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tel que $\varepsilon > 0$, il existe N tel que :

$$p \geqslant N \text{ et } q \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad d(u_p\,,\,u_q) \leqslant \varepsilon \quad .$$

Ces notions seront développées dans le prochain chapitre : on montre aisément que toute suite convergente est une suite de Cauchy, mais la réciproque est fausse si $E = \mathbb{Q}$ donc $\mathbb{Q}$ n'est pas *complet*. Cauchy (1872) a défini $\mathbb{R}$ comme le quotient de l'ensemble des suites de Cauchy de rationnels par la relation d'équivalence :

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d\,(x_n\,,\,y_n) = 0$$

et l'a muni d'une structure de corps ordonné, et de plus l'espace métrique $E = \mathbb{R}$ est **complet**, c'est à dire que toute suite de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{R}$ est convergente.

3 Définition axiomatique de $\mathbb{R}$

On peut montrer que les deux constructions ci-dessus définissent le même corps des nombres réels, qui peut également faire l'objet d'une définition axiomatique :

Définition 1 $\mathbb{R}$ *est l'unique (à isomorphisme près) corps totalement ordonné contenant* $\mathbb{Q}$ *dans lequel toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure.*

Théorème 1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante est majorée de nombres réels. Alors* (u_n) *converge et sa limite* ℓ *vérifie :*

$$\ell \,=\, \sup\{\,u_n \;/\; n\in\mathbb{N}\,\} \quad .$$

Exercice 1 Démontrer ce théorème à partir de la définition 1.

Théorème 2 Propriété des segments emboîtés. *Soit* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de segments de* $\mathbb{R}$ *telle que :* $I_{n+1} \subset I_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et la longueur de* I_n *tend vers* 0 *quand* n *tend vers l'infini. Alors l'ensemble :*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

est un singleton.

Exercice 2 Démontrer ce théorème. Comment se traduit-il en termes de suites ?

Exercice 3 Montrer que $\mathbb{R}$ est *archimédien*, c'est à dire qu'il vérifie la propriété :

$$\forall a > 0\,,\, \forall b > 0\,,\, \exists n \in \mathbb{N} \;/\; n\cdot b > a$$

(on pourra raisonner par l'absurde). En déduire que pour tout réel x, il existe un unique entier noté $E(x)$ et appelé la *partie entière* de x tel que :

$$E(x) \leqslant x < E(x) + 1\,.$$

4 Développements décimaux

Les *nombres décimaux* sont les nombres rationnels qui peuvent s'écrire sous la forme $p\,/10^n$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire ceux dont l'écriture sous forme irréductible admet un dénominateur de la forme $2^{\,a}\,5^b$ avec $a\,,\,b \in \mathbb{N}$. Si a_0 est un entier naturel et si pour tout entier $n \geqslant 1$ le nombre a_n est un entier compris entre 0 et 9, le nombre :

$$x_n \,=\, \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}$$

est donc un décimal, et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy puisque la série de terme général $a_n\,/10^n$ est convergente, car son terme général est positif et majoré par $10/10^n$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente. Sa limite est notée :

$$x \,=\, a_0\,,\, a_1\,a_2\,\ldots\,a_n\,\ldots$$

et on appelle cette écriture un *développement décimal illimité* du réel positif x , tandis que :

$$-x \;=\; -\,a_0\,,\,a_1\,a_2\,\ldots\,a_n\,\ldots$$

est un développement décimal du réel négatif $-x$. Réciproquement, tout nombre réel admet un développement décimal, ce qui montre en particulier que tout réel est la limite d'une suite de rationnels, c'est à dire :

Théorème 3 $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$ *.*

Si x est un réel positif, il suffit de poser :

$$x_n \;=\; \frac{E\,(10^n x)}{10^n}$$

pour obtenir une telle écriture, et on obtient : $a_0 = E(x)$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, a_n est le dernier chiffre de l'écriture en base 10 de l'entier $E\,(10^n x)$. On a pour tout entier naturel n :

$$x_n \leqslant x < x_n + \frac{1}{10^n}$$

donc le décimal x_n est la valeur approchée de x à 10^{-n} près par défaut obtenue en tronquant à l'ordre n la série :

$$x \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} \quad .$$

Si x est négatif, on pose $x' = -x$ et on est ramené au cas précédent, mais cette écriture n'est pas unique car on a par exemple :

$$0,999.... = 1$$

et plus généralement, tous les nombres décimaux admettent deux développements (l'un fini, l'autre ne comportant que des 9 à partir d'un certain rang et appelé *développement impropre*) tandis qu'on peut montrer que les réels non décimaux n'en admettent qu'un.

Exercice 4 Soient a et b deux entiers naturel tels que $b \neq 0$. On pose $x = a/b$ et on définit par récurrence deux suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels telles que :

- d_0 et r_0 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b
- pour tout entier naturel n , d_{n+1} et r_{n+1} sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $10\,r_n$ par b .

a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$x \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \;+\; \frac{r_k}{10^k b} \;.$$

b) Montrer qu'il existe deux entiers naturels $q' > q$ tels que $r_{q'} = r_q$.
c) On pose $p = q' - q$. Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est p-périodique à partir du rang q et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est p-périodique à partir du rang $q+1$.
d) En déduire qu'un nombre réel est rationnel si et seulement si il admet un développement décimal illimité périodique à partir d'un certain rang.

Exercice 5 Calculer la somme des nombres rationnels suivants :

$$a = 3,565656... \qquad \text{et} \qquad b = 0,653653653... \quad .$$