Chapitre 10 : Séries de Fourier

1 Définitions et formule de Parseval

On fixe un réel $T > 0$ et on note E_T l'espace vectoriel des applications T-périodiques et continues par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 1 Soit $f \in E_T$: montrer que $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,dt$ ne dépend pas du réel a.

On note $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ et pour toute fonction $f \in E_T$ on pose :

$$c_p(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\; e^{-i\,p\,\omega\,t}\,dt = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\; e^{-i\,p\,\omega\,t}\,dt$$

pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $a \in \mathbb{R}$. La série de fonctions définie par :

$$S(f)\;(x) = c_0(f) + \sum_{n\geqslant 1}\left(c_n(f)\,e^{\,i\,n\,\omega\,x} + c_{-n}(f)\,e^{-i\,n\,\omega\,x}\right)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ est appelée la forme exponentielle de la série de Fourier de f. On pose aussi :

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt\;,\;\; a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T \cos(n\,\omega\,t)\,f(t)\,dt \;\;\text{ et }\;\; b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T \sin(n\,\omega\,t)\,f(t)\,dt$$

pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $a \in \mathbb{R}$ et on a donc :

$$S(f)\;(x) = a_0\,(f) + \sum_{n\geqslant 1}\left(a_n(f)\,\cos\,(n\,\omega\,x) + b_n(f)\,\sin\,(n\,\omega\,x)\right)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui est la forme trigonométrique de la série de Fourier de f, puisque $a_0(f) = c_0(f)$ et qu'on a pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\begin{pmatrix} a_n(f) \\ b_n(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_n\,(f) \\ c_{-n}(f) \end{pmatrix} \quad\text{et}\quad \begin{pmatrix} c_n\,(f) \\ c_{-n}(f) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n(f) \\ b_n(f) \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 a) Montrer que si $f \in E_T$ est paire, on a pour tout entier $n \geqslant 1$: $b_n(f) = 0$ et $a_n(f) = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} \cos(n\,\omega\,t)\,f(t)\,dt$, ainsi que : $a_0(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt$.
b) Montrer que si $f \in E_T$ est impaire, on a : $a_n(f) = 0$ pour tout entier naturel n et : $b_n(f) = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(n\,\omega\,t)\,f(t)\,dt$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Le point de vue hilbertien développé dans l'UE 4 permet en particulier de démontrer :

Théorème 1 *Pour toute fonction $f \in E_T$, on a la* **formule de Parseval** *:*

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\,f(t)\,|^2\;dt \;=\; \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |\,c_p(f)\,|^2 = |\,a_0(f)\,|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\,a_n(f)\,|^2 + |\,b_n(f)\,|^2}{2}\,.$$

Remarque 1 Comme ces séries sont à termes positifs, ce théorème montre la convergence de chacune des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |\,a_n(f)\,|^2$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |\,b_n(f)\,|^2$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |\,c_n(f)\,|^2$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |\,c_{-n}(f)\,|^2$ et on pose :

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |\,c_p(f)\,|^2 = |\,c_0(f)\,|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |\,c_n(f)\,|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |\,c_{-n}(f)\,|^2\;\;.$$

Remarque 2 Attention à la place du facteur 2 ! Nous avons adopté ici les conventions du programme de BTS, mais il est plus fréquent de trouver dans la littérature la convention :

$$a_0(f) = 2\, c_0(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\, dt$$

qui conduit à écrire la forme trigonométrique de la série de Fourier de f sous la forme :

$$S_f\ (x) = \frac{a_0\,(f)}{2} + \sum_{n \geqslant 1} \Big(a_n(f)\, \cos(n\, \omega\, x) \,+\, b_n(f)\, \sin(n\, \omega\, x) \Big)$$

et dans ce cas, la formule de Parseval s'écrit sous forme trigonométrique :

$$\frac{2}{T} \int_0^T |\, f(t)\,|^2\, dt = \frac{|\, a_0(f)\,|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(|\, a_n(f)\,|^2 + |\, b_n(f)\,|^2 \big)\ .$$

2 Le théorème de Jordan-Dirichlet

Définition 1 *Si $f \in E_T$, la régularisée de f est la fonction $\widehat{f} \in E_T$ définie par :*

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{2} \Big(f_g(x) + f_d(x) \Big) \quad \text{où} \quad f_g(x) = \lim_{t \to x^-} f(t) \quad \text{et} \quad f_d(x) = \lim_{t \to x^+} f(t)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, qui ne diffère de f qu'en ses discontinuités.

Théorème 2 (Jordan-Dirichlet) *Pour toute fonction T-périodique $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1 par morceaux, la série de Fourier S_f de f converge simplement vers la fonction $\widehat{f}$.*

Toute cette section est consacrée à la preuve de ce théorème. Remarquons tout d'abord que quitte à poser : $f(x) = g(\omega\, x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il suffit de traiter le cas où $T = 2\pi$. L'argument clef de cette preuve est le lemme suivant, qui résulte d'une intégration par parties pour les fonctions de classe C^1 et d'un argument d'approximation pour le cas général.

Lemme 1 (Riemann-Lebesgue) *Soient $a < b$ deux réels et $h\ :\ [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. On a :* $\displaystyle \lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_a^b e^{\,i\, \lambda\, t}\, h(t)\, dt = 0.$

Ce lemme implique en particulier que pour toute fonction $h \in E_{2\pi}$, les coefficients de Fourier $a_n(h)$, $b_n(h)$, $c_n(h)$ et $c_{-n}(h)$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui résulte également de la formule de Parseval.

Définition 2 *Le noyau de Dirichlet d'ordre $n \in \mathbb{N}$ est l'application $D_n\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par* $\displaystyle D_n(x) = \sum_{p=-n}^{n} e^{\,i\, p\, x}$ *pour tout $x \in \mathbb{R}$, qui est bien sûr continue, 2π-périodique et paire.*

Exercice 3 Montrer que : $\displaystyle \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_n(t)\, dt = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et : $D_n(x) = \dfrac{\sin\Big((n + \frac{1}{2}) x \Big)}{\sin(\frac{x}{2})}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Définition 3 *Pour tout $(f, g) \in E_{2\pi}^2$, le produit de convolution de f et g est l'application $f * g\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :*

$$f * g\,(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x - t)\, g(t)\, dt\, .$$

Exercice 4 a) Montrer que pour tout $(f,g)\in E_{2\pi}^2$ la fonction $f*g$ est 2π-périodique et que $f*g=g*f$.
b) Soit $f\in E_{2\pi}$: montrer qu'on a : $e_p*f=c_p(f)\,e_p$ pour tout $p\in\mathbb{Z}$, et en déduire que la n-ième somme partielle de la série de Fourier $S(f)$ est donnée par : $S_n(f)=f*D_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$S_n(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\Big((n+\frac{1}{2})\,t\Big)\frac{f(x+t)+f(x-t)}{\sin(\frac{t}{2})}\,dt\,.$$

c) En déduire que pour tout réel x, la quantité $S_n(f)(x)-\widehat{f}(x)$ peut s'écrire :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\Big((n+\frac{1}{2})\,t\Big)\frac{f(x+t)-f_d(x)}{\sin(\frac{t}{2})}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\Big((n+\frac{1}{2})\,t\Big)\frac{f(x-t)-f_g(x)}{\sin(\frac{t}{2})}\,dt\,.$$

d) On suppose que f est continue par morceaux. Montrer que pour tout réel x, les fonctions définies sur $]\,0,\pi]$ par :

$$h_d(t)=\frac{f(x+t)-f_d(x)}{\sin(\frac{t}{2})}\qquad\text{et}\qquad h_g(t)=\frac{f(x-t)-f_g(x)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

sont prolongeables par continuité en 0. En appliquant le lemme de Riemann-Lebesgue, en déduire le théorème de Jordan-Dirichlet.

3 Convergence normale

Théorème 3 *Si $f\in E_T$ est une fonction continue et de classe C^1 par morceaux, alors la série de Fourier $S(f)$ converge normalement vers f.*

Démonstration : le théorème de Jordan-Dirichlet montre que $S(f)$ converge simplement vers f. De plus, on a : $f'\in E_T$ et $c_p(f')=i\,p\,c_p(f)$ pour tout $p\in\mathbb{Z}$, d'où :

$$|\,c_p(f)\,|=\frac{1}{|p|}\;|\,c_p(f')\,|\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2}+|\,c_p(f')\,|^2\right)$$

si $p\neq 0$, donc la formule de Parseval appliquée à la fonction f' montre que $S(f)$ converge normalement, ce qui conclut la preuve.

4 Exercices classiques

Exercice 5 Soit $f\in E_T$ une fonction continue dont tous les coefficients de Fourier sont nuls : montrer que f est la fonction nulle. En déduire que deux fonctions continues ayant les mêmes coefficients de Fourier sont forcément égales.

Exercice 6 Phénomène de Gibbs. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x)=1$ si $0<x\leqslant\pi$ et $f(x)=-1$ si $-\pi<x\leqslant 0$.
a) Calculer la série de Fourier trigonométrique de f et étudier sa convergence simple et sa convergence normale. Tracer le graphe de ses premières sommes partielles : qu'observe-t-on ?
b) On pose $S_n(x)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$ pour tout réel x et $x_n=\dfrac{\pi}{2n+2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n(x_n)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx$.
c) Montrer que la série de Fourier de f ne converge pas uniformément vers f.

Exercice 7 **a)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = |\,t\,|$ pour tout $t \in]-\pi\,,\,\pi]$. Calculer la série de Fourier de f et étudier sa convergence.

b) En déduire la valeur des sommes : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

c) En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 8 **a)** Soient $a > 0$ un réel et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique vérifiant $f(t) = \cosh(a\,t)$ si $t \in]-\pi\,,\,\pi]$. Calculer la série de Fourier de f et étudier sa convergence.

b) En déduire la valeur des sommes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^2+n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2+n^2}$.

c) En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 9 Soit $(z_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes telle que $\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |\,z_p\,|$ converge. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} z_p\, e^{ip\,x}$ pour tout réel x est continue, et calculer sa série de Fourier.

Exercice 10 **Inégalité de Wirtinger.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique de classe C^1 telle que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = 0$. Montrer que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(t)\Big)^2\,dt \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \Big(f'(t)\Big)^2\,dt$$

et déterminer les cas d'égalité.