Chapitre 10 : Équations différentielles

1 Définitions

Définition 1 *On appelle équation sous forme résolue toute équation différentielle de la forme $y' = f(t,y)$, où $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On appelle solution de cette équation différentielle toute application dérivable $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, vérifiant : $(t,\varphi(t)) \in \Omega$ et $\varphi'(t) = f(t,\varphi(t))$ pour tout $t \in I$.*

Définition 2 *Soit $y' = f(t,y)$ une équation différentielle sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, soient $\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ et $\varphi_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ deux solutions de cette équation différentielle. Si $I_1 \subseteq I_2$ et si, pour tout $t \in I_1$, on a $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$, on dit que la solution φ_2 est un prolongement de la solution φ_1. Si $I_1 \neq I_2$, on dit que c'est un prolongement strict.*

Définition 3 *Soient $y' = f(t,y)$ une équation différentielle sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, et $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de cette équation différentielle. L'application φ est appelée solution maximale de l'équation différentielle si elle n'admet pas de prolongement strict.*

Remarque 1 Les définitions ci-dessus se généralisent sans difficulté au cas des équations différentielles définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ en identifiant $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$ de façon usuelle, mais il est fondamental que la “variable-temps” t varie dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1 Équation intégrale Montrer que si $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est continue, si $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ est continue et vérifie : $(t,\varphi(t)) \in \Omega$ pour tout $t \in I$, et si on choisit $t_0 \in I$, alors φ est solution de $y' = f(t,y)$ si et seulement si on a pour tout $t \in I$:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\, ds\,.$$

2 Problème de Cauchy

Soient (E) l'équation différentielle $y' = f(t,y)$ définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et (t_0, y_0) un point de Ω : un problème naturel est le *problème de Cauchy*, qui est de trouver toutes les solutions φ de (E) satisfaisant la condition initiale $\varphi(t_0) = y_0$.

Définition 4 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. On dit que f est localement lipschitzienne par rapport à y si tout point $(t_0, y_0) \in \Omega$ admet voisinage V tel qu'il existe une constante positive k vérifiant :*

$$\forall (t,y_1) \in V\,,\ \forall (t,y_2) \in V\,,\ \|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \leqslant k\,\|y_1 - y_2\|\,,$$

la norme étant l'une quelconque des normes (toutes équivalentes) sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application continue et localement lipschitzienne par rapport à y . Pour tout $(t_0, y_0) \in \Omega$, il existe une unique solution maximale φ de l'équation différentielle $y' = f(t,y)$ satisfaisant la condition initiale $\varphi(t_0) = y_0$. Elle est définie sur un intervalle* **ouvert** *I contenant t_0 .*

Il faut noter que l'intervalle I dépend de l'équation et de la condition initiale (t_0, y_0), et qu'on ne peut pas le prescrire à l'avance sans hypothèses supplémentaires. Ce théorème s'emploie la plupart du temps sous la forme suivante.

Corollaire 1 *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, si $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et si $(t_0, y_0) \in \Omega$, il existe une unique solution maximale φ de l'équation différentielle $y' = f(t,y)$ satisfaisant la condition initiale $\varphi(t_0) = y_0$. Elle est définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0 .*

Définition 5 *Le graphe $\Gamma_\varphi \subset \Omega$ de φ est appelé une courbe intégrale de l'équation $y' = f(t, y)$.*

Définition 6 *On dit que l'équation $y' = f(t, y)$ est autonome quand f ne dépend pas de t, c'est à dire que : $\Omega = \mathbb{R} \times U$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et qu'il existe une application $X : U \to \mathbb{R}^n$ telle que $f(t, y) = X(y)$ pour tout $y \in U$. Par abus de langage, on appelle aussi courbe intégrale de l'équation autonome $y' = X(y)$ la courbe $t \mapsto \varphi(t)$ tracée dans U.*

Le théorème de Cauchy Lipschitz montre que les courbes intégrales (au sens de la définition 5) ne peuvent pas se croiser. Dans le cas autonome, on obtient un résultat plus fort : si $T \in \mathbb{R}$ et si φ vérifie l'équation $y' = X(y)$, l'application ψ définie par $\psi(t) = \varphi(t - T)$ est elle aussi solution. Par conséquent, si φ_1 et φ_2 sont deux solutions maximales de $y' = X(y)$ et vérifient $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2)$, on a $I_2 = I_1 + t_2 - t_1$ et $\varphi_2(t) = \varphi_1(t + t_1 - t_2)$ pour tout $t \in I_2$, donc φ_1 et φ_2 définissent la même courbe intégrale au sens de la définition 6. Les courbes intégrales au sens de cette définition ne peuvent donc pas se croiser elles non plus.

Exercice 2 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $X : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. Soit φ une solution maximale de l'équation autonome $y' = X(y)$.

a) Montrer que la fonction φ est injective ou périodique.

b) On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ et $p \in U$ tels que φ est définie sur l'intervalle $[\,t_0\,, +\infty[$ et vérifie : $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = p$. Montrer que $X(p) = 0$ (*on pourra raisonner par l'absurde*).

Exercice 3 Soit $\Omega = \mathbb{R} \times]\,a\,, b\,[$ avec $a\,, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\,, +\infty\}$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $\varphi : J \to]\,a\,, b\,[$ une solution maximale de l'équation $y' = f(t\,, y)$. On suppose que $J =]\,t_1\,, t_2\,[$ avec $t_k \in \mathbb{R}$ et que φ admet une limite au point t_k où $k \in \{1\,, 2\}$. Montrer que :

$$\lim_{t \to t_k} \varphi(t) = a \quad \text{ou} \quad \lim_{t \to t_k} \varphi(t) = b\,.$$

Exemple 1 Considérons l'équation différentielle $y' = 2\sqrt{|y|}$. La fonction $f : (t, y) \mapsto 2\sqrt{|y|}$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable y sur chacun des deux demi-plans $\Omega_+ = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$ et $\Omega_- = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 / y < 0\}$. C'est une équation à variables séparables (voir ci-après) dont les solutions maximales sont : $\varphi(t) = (t + c)^2$ pour $t \in]-c, +\infty[$ dans Ω_+ et $\varphi(t) = -(t+c)^2$ pour $t \in]-\infty, c[$ dans Ω_-, avec $c \in \mathbb{R}$. Par tout point (t_0, y_0) de Ω_+ (respectivement Ω_-), il passe une unique courbe intégrale maximale définie sur l'intervalle ouvert $]-c, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, -c[$). On notera que ces solutions tendent vers 0 lorsque t tend vers $-c$ mais que le point $(-c, 0)$ n'appartient ni à Ω_+, ni à Ω_-.

D'autre part, on a : $0 = 2\sqrt{|0|}$, ce qui correspond à la solution maximale $\varphi_0(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si l'on résout maintenant l'équation sur $\mathbb{R}^2$ tout entier, par tout point du plan passent une infinité de courbes intégrales définies sur $\mathbb{R}$, donc maximales. Elles sont obtenues en raccordant, sur des intervalles arbitraires, les courbes intégrales dans Ω_- et Ω_+ avec φ_0.

Exercice 4 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$. Soit $f : \Omega \to E$ une application de classe C^r avec $r \geqslant 1$. Soit y une solution de l'équation différentielle $y' = f(t\,, y)$. Montrer par récurrence que la fonction y est de classe C^{r+1}.

3 Étude qualitative

La plupart des équations différentielles ne sont pas algébriquement résolubles et, même si l'on sait que par tout point il passe une unique courbe intégrale, il faut arriver à déterminer des propriétés de cette solution sans en connaître d'expression explicite. La voie de la résolution géométrique qualitative ouverte par Henri Poincaré au début du siècle dernier est l'approche la plus efficace, même si la résolution numérique approchée est la méthode la plus simple et permet souvent de formuler des conjectures qu'on prouve par la première approche. Nous allons utiliser ici la méthode qualitative pour étudier les solutions d'une équation simple.

L'équation logistique $y' = y\,(1-y)$.

Cette équation étant autonome, l'ensemble de ses courbes intégrales au sens de la définition 5 est globalement invariant par les translations horizontales. Les applications $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $f(t,y) = X(y) = y\,(1-y)$ étant de classe C^1, le théorème de Cauchy-Lipschitz montre que par tout point, il passe une unique courbe intégrale.

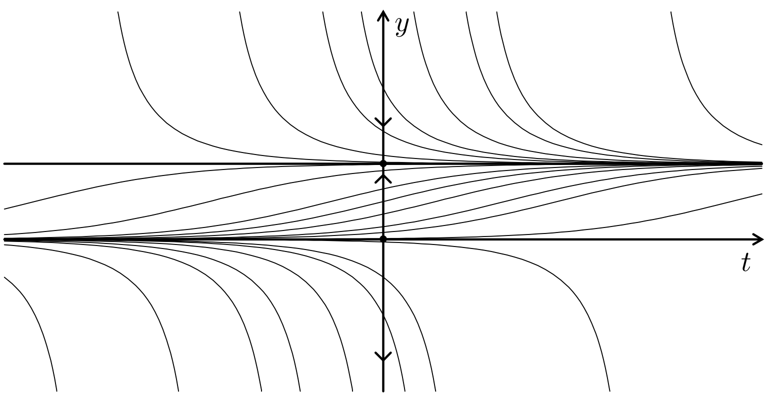
On a $X(y) = 0$ si $y = 0$ et si $y = 1$, donc l'équation logistique admet deux solutions constantes, définies par $\varphi_0(t) = 0$ et $\varphi_1(t) = 1$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, on en déduit un régionnement du plan (t,y) en cinq zones : la zone I définie par $y > 1$, la zone II définie par $y = 1$, la zone III définie par $0 < y < 1$, la zone IV définie par $y = 0$ et la zone V définie par $y < 0$. Si (t_0, y_0) est un point d'une de ces zones, la courbe représentative de la solution maximale φ vérifiant : $\varphi(t_0) = y_0$ reste dans cette zone. Dans les zones II et IV, les solutions sont les constantes φ_1 et φ_0 .

Comportement des solutions dans la zone I : Dans cette zone, on a : $f(t,y) < 0$, donc les solutions sont décroissantes et minorées par 1. Soit (t_0, y_0) un point de cette zone, et φ la solution maximale passant par (t_0, y_0). On sait que φ est définie sur $[t_0, b\,[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et que $\varphi(t)$ tend vers $\ell \geqslant 1$ quand t tend vers b. Si l'on avait : $b \in \mathbb{R}$, on aurait : $\ell = 1$ (voir l'exercice 3), et on obtiendrait une contradiction avec l'unicité de φ_1 . On en déduit que $b = +\infty$, et grâce au résultat de l'exercice 2 on en conclut que $X(\ell) = 0$, donc que $\ell = 1$. Les courbes intégrales sont donc asymptotes en $+\infty$ à la droite d'équation $y = 1$.

Comportement des solutions dans la zone III : Dans la zone III, les solutions sont croissantes. Un raisonnement analogue à celui que nous venons d'effectuer montre qu'elles sont définies sur $\mathbb{R}$, admettent 0 comme limite en $-\infty$ et 1 comme limite en $+\infty$.

Comportement des solutions dans la zone V : Dans la zone V, les solutions sont décroissantes. Elles sont définies sur $]-\infty, t_0\,]$ et admettent 0 comme limite en $-\infty$. Pour préciser leur comportement si $t > t_0$, remarquons qu'on a dans cette zone : $f(t,y) < -y^2$, donc que $\varphi'(t) < -\varphi^2(t)$, c'est à dire que la fonction $h = 1/\varphi$ vérifie $h'(t) \geqslant 1$ pour tout $t \geqslant t_0$, donc $h(t) \geqslant 1/y_0 + t - t_0$ si $t \geqslant t_0$. Mais h est négative, donc ceci n'est possible que si $t < t_0 - 1/y_0$. On a donc : $b \leqslant t_0 - 1/y_0$ et d'après le résultat de l'exercice 3 la fonction φ tend vers $-\infty$ au point b , donc sa courbe représentative admet une asymptote verticale.

De même, dans la zone I les solutions sont décroissantes, donc vérifient : $y \geqslant y_0$ si $t \leqslant t_0$, donc $y^2 \geqslant y_0\,y$, d'où $f(t,y) \leqslant (-1 + 1/y_0)\,y^2$. Comme $y_0 > 1$, on a : $c = 1 - 1/y_0 > 0$ et $f(t,y) \leqslant -c\,y^2$, et on montre comme ci-dessus que $h = 1/\varphi$ vérifie : $h(t) \leqslant 1/y_0 + c\,(t - t_0)$ si $t \leqslant t_0$. On en conclut de même que : $a \geqslant t_0 - 1/(c\,y_0)$ et que la fonction φ tend vers $+\infty$ au point a . Dans les zones I et V , les solutions ne sont donc pas définies sur $\mathbb{R}$ mais "explosent" en temps négatif (resp. positif), et les courbes intégrales admettent des asymptotes verticales.



En termes d'équations autonomes (définition 6), l'équation logistique n'a donc que 5 courbes intégrales, qui apparaissent ci-dessus en projection Oy :

- les points stationnaires $\varphi_0 = 0$ et $\varphi_1 = 1$,
- la courbe $\varphi_{\frac{1}{2}}$ reliant 0 à 1,
- la courbe φ_2 reliant $+\infty$ à 1,
- la courbe φ_{-1} reliant 0 à $-\infty$.

4 Équations d'ordre supérieur

Dans cette section, on considère uniquement des équations scalaires : ce qui suit se généralise aux fonctions à valeurs vectorielles, mais les notations deviennent plus compliquées.

Définition 7 *Une équation différentielle scalaire d'ordre n est une équation de la forme $(E_n)\,:\, y^{(n)} = f(t\,,\, y\,,\, y'\,,\, \ldots\,,\, y^{(n-1)})$, où f définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles. Une solution de cette équation est une fonction n fois dérivable $\varphi\,:\, I\to\mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, vérifiant pour tout $t\in I$:*

$$(t,\varphi(t),\varphi'(t),\ldots,\varphi^{(n-1)}(t))\in\Omega \qquad \textit{et} \qquad \varphi^{(n)}(t) = f(t,\varphi(t),\varphi'(t),\ldots,\varphi^{(n-1)}(t))\,.$$

A une telle équation, on associe le système d'ordre 1 :

$$(S_1)\ :\quad \begin{cases} y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(t\,,\, y_1\,,\, y_2\,,\,\ldots\,,\, y_n). \end{cases}$$

Si $\varphi\,:\, I\to\mathbb{R}$ est solution de (E_n), alors $(\varphi\,,\,\varphi'\,,\,\ldots\,,\,\varphi^{(n-1)})\,:\, I\to\mathbb{R}^n$ est solution de (S_1). Réciproquement, si $(\varphi_1\,,\,\varphi_2\,,\,\ldots\,,\,\varphi_n)\,:\, I\to\mathbb{R}^n$ est solution de (S_1), alors la fonction φ_1 est n fois dérivable, et c'est une solution de (E_n). Grâce à cette correspondance, on peut reformuler le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations d'ordre n :

Théorème 2 *Soit Ω est un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et soit $f\,:\,\Omega\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Pour tout point $(t_0, y_0\,,\, y_0'\,,\,\ldots y_0^{(n-1)})\in\Omega$, il existe une unique solution maximale φ de $y^{(n)} = f(t\,,\, y\,,\, y'\,,\,\ldots\,,\, y^{(n-1)})$ vérifiant : $\varphi^{(k)}(t_0) = y_0^{(k)}$ pour $0\leqslant k\leqslant n-1$. Elle est définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0.*

Le problème de Cauchy pour une équation d'ordre n est donc la donnée en un point des valeurs de la fonction et de ses $n-1$ premières dérivées successives. Il ne faut surtout pas confondre cette question avec le *problème de Dirichlet*, qui consiste à résoudre une équation différentielle en se donnant des "conditions aux limites". Ainsi, pour une équation d'ordre 2, le problème de Cauchy consiste à trouver les solutions φ vérifiant $\varphi(t_0) = y_0$ et $\varphi'(t_0) = y_0'$, alors que le problème de Dirichlet sur le segment $[a,b]$ consiste à trouver les solutions φ sur $[a,b]$ vérifiant $\varphi(a) = y_1$ et $\varphi(b) = y_2$.

5 Équations à variables séparables

Il s'agit des équations scalaires de la forme $(E)\,:\, y' = h(t)\,g(y)$, où la fonction $h\,:\, I\to\mathbb{R}$ est continue et $g\,:\, J\to\mathbb{R}$ est localement lipschitzienne. Pour tout $c\in J$ tel que $g(c) = 0$, la fonction constante $\varphi_c\,:\, t\mapsto c$ est solution de (E) sur I. Le théorème de Cauchy Lipschitz permet donc d'affirmer que si $\varphi\,:\, I_0\to J$ est une solution non constante de (E) avec $I_0\subset I$, la fonction $g\circ\varphi$ ne s'annule nulle part. Elle est donc à valeurs dans un intervalle $J_0\subset J$ sur lequel g ne s'annule pas et où on peut récrire (E) sous la forme $y'/g(y) = h(t)$. Soit G une primitive de $1/g$ et soit H une primitive de h : l'équation (E) équivaut donc à la constance de la fonction $G\circ\varphi - H$, c'est à dire qu'on a : $G(\varphi(t)) = H(t) + c$ pour tout $t\in I_0$, avec $c\in\mathbb{R}$ fixé. Si l'on sait résoudre l'équation $G(y) = c$, on obtient ainsi les solutions de (E).

Exercice 5 Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle I indiqué.
a) $y' = -t\,y^2$ $(I=\mathbb{R})$
b) $t^3y' + y^3 = 0$ $(I = \mathbb{R}_+^*)$.

Exercice 6 Résoudre algébriquement l'équation logistique $y' = y\,(1-y)$, et retrouver les résultats de la section 3.

6 Équations linéaires

Définition 8 *On appelle équation différentielle linéaire toute équation* $y' = f(t, y)$ *définie sur* $I \times \mathbb{R}^n$ *avec* $I \subset \mathbb{R}$, *où* $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est de la forme :* $f(t, y) = a(t)(y) + b(t)$ *avec* $a(t) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *et* $b(t) \in \mathbb{R}^n$ *pour tout* $t \in I$. *L'équation* $y' = a(t)(y)$ *est appelée l'équation homogène associée, et la fonction* $t \mapsto b(t)$ *est le second membre.*

En notant $A(t)$ la matrice de $a(t)$ dans la base canonique, $B(t)$ les coordonnées de $b(t)$ et $Y(t)$ celles de $y(t)$, l'équation s'écrit donc : $Y'(t) = A(t)\,Y(t) + B(t)$ pour $t \in I$. On parle aussi de *système différentiel*.

Théorème 3 *On considère une équation différentielle linéaire* $y' = a(t)(y) + b(t)$ *sur* $I \times \mathbb{R}^n$. *Si* I *est un intervalle ouvert et si les applications* a *et* b *sont continues sur* I, *les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites sur* $I \times \mathbb{R}^n$ *et les solutions maximales sont définies sur* I *tout entier. Les solutions du système homogène forment un espace vectoriel de dimension* n *et les solutions de l'équation avec second membre forment un espace affine dirigé par cet espace vectoriel.*

En admettant le fait que les solutions maximales sont définies sur I tout entier, les exercices suivants démontrent ce théorème à partir du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Exercice 7 On note S_H l'ensemble des solutions de $y' = a(t)y$. Montrer que S_H est un sous-espace vectoriel de $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ et que pour tout point $t \in I$, l'application $ev_t : S_H \to \mathbb{R}^n$ définie par $ev_t(\varphi) = \varphi(t)$ est un isomorphisme.

On en déduit que les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : I \to \mathbb{R}^n$ forment une base de S_H si et seulement si il existe $t_0 \in I$ tel que les vecteurs $\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$, et que dans ce cas les vecteurs $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$ pour tout $t \in I$.

Exercice 8 On note S l'ensemble des solutions de $y' = a(t)y + b(t)$. Montrer que S est un sous-espace affine de $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ dirigé par S_H.

Ce dernier résultat est le *principe de superposition*, et on le retient souvent en disant que la solution générale de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

6.1 Méthode de variation des constantes

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et soient $a : I \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $b : I \to \mathbb{R}^n$ deux applications continues. On considère les équations linéaires sur $I \times \mathbb{R}^n$:

$$(E) : y' = a(t)(y) + b(t) \qquad \text{et} \qquad (H) : y' = a(t)(y)\,.$$

Supposons qu'on ait résolu (H), et soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : I \to \mathbb{R}^n$ une base de S_H. Les solutions de (H) sont donc les fonctions de la forme : $c_1\,\varphi_1 + \cdots + c_n\,\varphi_n$ où $c_1, \ldots, c_n$ sont des constantes réelles fixées, et la méthode de variation des constantes consiste à chercher les solutions de (E) sous la forme : $f = c_1\,\varphi_1 + \cdots + c_n\,\varphi_n$ où $c_1, \ldots, c_n$ sont des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in I$, on a donc : $f'(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\varphi'_k(t) + c'_k(t)\varphi_k(t)$, d'où :

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\,a(t)\,(\varphi_k(t)) + c'_k(t)\,\varphi_k(t) = a(t)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k(t)\,\varphi_k(t)\right) + \sum_{k=1}^{n} c'_k(t)\,\varphi_k(t)$$

donc : $f'(t) = a(t)(f(t)) + \sum_{k=1}^{n} c'_k(t)\,\varphi_k(t)$. On en déduit que f vérifie (E) si et seulement si :

$$\sum_{k=1}^{n} c'_k(t)\,\varphi_k(t) = b(t) \quad \text{pout tout } t \in I\ ,$$

c'est à dire si les coordonnées de $b(t)$ dans la base $(\varphi_1(t)\,, \ldots\,, \varphi_n(t))$ sont $(c'_1(t)\,, \ldots\,, c'_n(t))$. En notant $R(t)$ la matrice de $(\varphi_1(t)\,, \ldots\,, \varphi_n(t))$ dans la base canonique pout tout $t \in I$, on obtient donc le système inversible :

$$(VC) \quad : \quad R(t)\begin{pmatrix} c'_1(t) \\ \vdots \\ c'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

En résolvant ce système, on obtient les fonctions $c'_1\,, \ldots\,, c'_n$, puis les fonctions $c_1\,, \ldots\,, c_n$, et finalement f. En choisissant des primitives de $c'_1\,, \ldots\,, c'_n$, on trouve ainsi une solution particulière f_0 de (E), mais si l'on considère toutes les primitives possibles (et donc n constantes d'intégration), on obtient la solution générale de (E), dont les composantes sont données par : $F_0(t) + R(t)\,C$ avec $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, et on retrouve ainsi la solution générale de (H).

6.2 Équations linéaires en dimension 1

En dimension $n = 1$ (on parle *d'équations scalaires*), on sait résoudre les équations différentielles linéaires (ce qui n'est plus le cas si $n \geqslant 2$) : l'équation s'écrit $y' = a(t)\,y + b(t)$ sur $I \times \mathbb{R}^n$, où a et b sont deux fonctions réelles continues sur I. Si A est une primitive de a sur I, l'équation s'écrit : $(y(t)\,e^{-A(t)})' = (y'(t) - a(t)\,y(t))e^{-A(t)} = b(t)\,e^{-A(t)}$: en choisissant une primitive B de $b\,e^{-A}$, les solutions s'écrivent donc : $(B + c)\,e^{A}$ avec $c \in \mathbb{R}$, et on retrouve le fait que l'ensemble des solutions est une droite affine : on a en fait utilisé la méthode de variation des constantes, qui est particulièrement simple dans ce cas.

Exercice 9 Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la solution de $y' = a(t)\,y + b(t)$ vérifiant $y(t_0) = y_0$ est donnée pour tout $t \in I$ par :

$$y(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} a(u)\,du} b(s)\,ds\,.$$

6.3 Équations linéaires à coefficients constants

Si l'application $a : \mathbb{R} \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est constante, on note m la valeur de cette constante et $M \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice de m dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Le système (H) s'écrit donc : $Y'(t) = MY(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec $Y(t) \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Proposition 1 *Pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, la série $\sum \frac{1}{n!}\,M^n$ est convergente, et on pose :*

$$e^M = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\,M^n.$$

L'application $e_M : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $e_M(t) = e^{\,tM}$ est dérivable et on a :

$$e'_M(t) = Me_M(t) \ \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}\,.$$

Corollaire 2 *Soient $M \in M_n(\mathbb{R})$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $Y_0 \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. La solution $Y : \mathbb{R} \to M_{n,1}(\mathbb{R})$ de $Y' = MY$ vérifiant $Y(t_0) = Y_0$ est donnée par : $Y(t) = e^{(t-t_0)M}Y_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

On est donc amené à calculer la matrice e^{tM} pour $t \in \mathbb{R}$. Si M est diagonalisable, on écrit : $M = PDP^{-1}$ avec D diagonale, et on appelle $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ ses valeurs propres. On a alors : $e^{tM} = Pe^{tD}P^{-1}$ où e^{tD} est diagonale, de valeurs propres $e^{t\lambda_i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$: ceci revient à décomposer l'équation vectorielle $y' = m\,y$ en n équations scalaires indépendantes $y_i' = \lambda_i\, y_i$ dans une base de diagonalisation de m. Sinon, on peut trianguler M (en passant dans $\mathbb{C}$ au besoin) pour résoudre les équations "en cascade".

Exercice 10 Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = & x + y \\ y' = & \phantom{x+{}} y \end{cases} .$$

6.4 Équations linéaires d'ordre n

Il s'agit d'équations différentielles scalaires de la forme :

$$(EL_n) : \quad y^{(n)} = a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + ... + a_0(t)\, y + b(t)\,,$$

où les fonctions $a_0\,, a_2\,, \ldots\,, a_{n-1}$ et b sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. A une telle équation, on associe comme ci-dessus le système (SL_1) : $Y' = A(t)\,Y + B(t)$, avec :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.. & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\[-4pt] & & & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \ldots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \qquad \text{et} : \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} .$$

Si $b = 0$ (équations homogènes), la correspondance décrite ci-dessus entre les solutions de (EL_n) et les solutions de (SL_1) est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et en général c'est un isomorphisme affine. On déduit le théorème suivant du théorème de Cauchy-Lipschitz :

Théorème 4 *Si I est un intervalle ouvert et si les fonctions $a_0\,, a_2\,, \ldots\,, a_{n-1}$ et b sont continues sur I, les solutions maximales de (EL_n) sont définies sur I tout entier. Les solutions de l'équation homogène forment un espace vectoriel de dimension n et les solutions de l'équation avec second membre forment un espace affine dirigé par cet espace vectoriel.*

Une fois résolue l'équation homogène, on peut comme ci-dessus résoudre l'équation avec second membre **en appliquant la méthode de variation des constantes au système SL_1.** Si $\varphi_1\,, \varphi_2\,, \ldots\,, \varphi_n$ est une base de l'espace des solutions de l'équation homogène, notons $Y_k(t)$ le vecteur-colonne dont les composantes sont $\varphi_k(t), \varphi_k'(t), \ldots\,, \varphi_k^{(n-1)}(t)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Les applications $(Y_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ forment une base de l'espace des solutions du système homogène, et on pose $Y(t) = c_1(t)Y_1(t) + \cdots + c_n(t)Y_n(t)$ pour $t \in I$, où les fonctions $c_1\,, \ldots\,, c_n : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables. Mais si Y est solution de (SL_1), ses composantes s'écrivent $\varphi\,, \varphi'\,, \ldots\,, \varphi^{(n-1)}$ où φ est solution de (EL_n), ce qui conduit à poser :

$$\begin{pmatrix} \varphi\ (t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1\ (t) & \ldots & \varphi_n\ (t) \\ \varphi_1{}'(t) & \ldots & \varphi_n{}'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} ,$$

et on obtient le système inversible :

$$\begin{pmatrix} \varphi_1\ (t) & \ldots & \varphi_n\ (t) \\ \varphi_1{}'(t) & \ldots & \varphi_n{}'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n(t) \end{pmatrix} .$$

6.5 Équations linéaires d'ordre n à coefficients constants

Définition 9 *Soit* $(H)\ :\ y^{(n)} = a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \ldots + a_0\,y$ *une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre* n *à coefficients constants. On appelle équation caractéristique de* (H) *l'équation* $P(\lambda) = 0$ *, où* $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1X - a_0$ *.*

Exercice 11 On appelle *matrice compagnon* de P la matrice A définie à la section 6.4. Montrer que $(-1)^nP$ est le polynôme caractéristique de A.

Théorème 5 *Soient* $\lambda_1\,,\ \ldots\ ,\ \lambda_r \in \mathbb{C}$ *les racines de* P*, et* $\mu_k \in \mathbb{N}^*$ *la multiplicité de* λ_k *pour* $1 \leqslant k \leqslant r$*. Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *, les fonctions* $\left(t \mapsto e^{\lambda_k t}\, t^j\right)_{1\leqslant k\leqslant r\,,\,0\leqslant j\leqslant \mu_k-1}$ *forment une base de* S_H *.*
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, on pose :* $\lambda_k = a_k + i\omega_k$ *pour* $1 \leqslant k \leqslant r$*, avec :* $\omega_k = 0$ *si* $1 \leqslant k \leqslant R$ *et :* $\omega_k \neq 0$ *si* $R+1 \leqslant k \leqslant r$*. Les familles de fonctions :* $\left(t \mapsto e^{a_k t}\, t^j\right)_{1\leqslant k\leqslant R\,,\,0\leqslant j\leqslant \mu_k-1}$*,* $\left(t \mapsto e^{a_k t}\cos(\omega_k t)\, t^j\right)_{R+1\leqslant k\leqslant r\,,\,0\leqslant j\leqslant \mu_k-1}$ *et* $\left(t \mapsto e^{a_k t}\sin(\omega_k t)\, t^j\right)_{R+1\leqslant k\leqslant r\,,\,0\leqslant j\leqslant \mu_k-1}$ *forment une base de* S_H *.*

Pour résoudre $(E)\ :\ y^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0\,y + b(t)$, on peut appliquer la méthode de variation des constantes, mais il est souvent plus simple d'utiliser le résultat suivant.

Proposition 2 *Si* b *est de la forme :* $b(t) = Q(t)\,e^{\lambda t}$ *pour* $t \in \mathbb{R}$ *, où* Q *est un polynôme de degré* q *, l'équation* (E) *admet une solution particulière de la forme* $t \mapsto R(t)e^{\lambda t}$*, où* R *est un polynôme de degré* q *si* λ *n'est pas racine de* P*, et de degré* $q + \mu_k$ *si* $\lambda = \lambda_k$ *.*

Exercice 12 Résoudre l'équation différentielle : $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = t$.

Exercice 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation différentielle : $y^{(n)} - y = e^t + e^{-t}$.