Chapitre 2 : Suites numériques

Dans tout ce qui suit on considère des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles, c'est à dire des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, et pour tout entier naturel (ou *rang*) n le réel u_n est appelé un *terme* de la suite. Plus généralement, une suite peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et on la notera alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. Les définitions et les résultats ci-dessous se généralisent sans difficulté aux suites à valeurs complexes **tant qu'ils ne font pas intervenir la relation d'ordre entre les termes, comme par exemple la monotonie**.

1 Définitions et théorèmes principaux

Définition 1 *La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \geqslant n_0$ tel que pour tout entier n vérifiant $n \geqslant N$, on a : $|u_n - \ell| < \varepsilon$.*

Dans ce cas, le réel ℓ est unique et est appelé la limite de $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, et on peut écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\,.$$

Les inégalités ci-dessus peuvent être indifféremment larges ou strictes, mis à part $\varepsilon > 0$. Lorsqu'une suite ne converge pas, on dit qu'elle est *divergente*.

Théorème 1 *Toute suite convergente est bornée.*

Définition 2 *La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si pour tout réel A, il existe un entier $N \geqslant n_0$ tel que pour tout entier n vérifiant $n \geqslant N$, on a : $u_n \geqslant A$ (resp. $u_n \leqslant A$).*

Une suite tendant vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ est donc non bornée, mais la réciproque est bien sûr fausse ! Par contre, le théorème 1 montre qu'elle ne converge pas, et on dit parfois pour souligner ce point qu'elle *diverge* vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Définition 3 *La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de Cauchy si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \geqslant n_0$ tel que pour tous entiers p et q vérifiant $p \geqslant N$ et $q \geqslant N$, on a : $|u_p - u_q| < \varepsilon$.*

Théorème 2 *Une suite numérique converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy.*

Théorème 3 *Toute suite réelle croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) est convergente, et sa limite est la borne supérieure (resp. inférieure) de l'ensemble de ses termes. Toute suite réelle croissante non majorée (resp. décroissante non minorée) tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$).*

Les règles de calcul sur les limites seront supposées connues **en prenant garde aux formes indéterminées** !

Proposition 1 *Si les suite (u_n) et (v_n) vérifient : $u_n \leqslant v_n$ pour tout rang n et* **si elles sont toutes les deux convergentes**, *alors on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n\,.$$

Si on a de plus : $u_n < v_n$ pour tout rang n, on obtient uniquement l'**inégalité large** en passant à la limite (exercice : donner un contre-exemple à l'inégalité stricte), et il ne faut surtout pas confondre ce résultat avec le théorème suivant, qui montre lui la convergence :

Théorème 4 ("Théorème des gendarmes") *Si la suite (u_n) est encadrée par deux suites convergentes de même limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors elle converge aussi vers ℓ.*

Définition 4 *Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si la suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante et :*

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0\,.$$

Ceci implique (exercice!) que pour tout rang n, on a : $u_n \leqslant v_n$.

Théorème 5 *Si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et pour tout rang n, on a :*

$$u_n \leqslant \ell \leqslant v_n\ .$$

Théorème 6 *Si $A \subset \mathbb{R}$ et $f\ :\ A \to \mathbb{R}$ est continue, et si la suite (u_n) à valeurs dans A converge vers $\ell \in A$, alors la suite $\big(f(u_n)\big)$ converge vers $f(\ell)$.*

Exercice 1 Écrire avec des quantificateurs et des connecteurs logiques les énoncés : “la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente” et “la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est divergente”.

Exercice 2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0 et telle que $u_0 > 0$. Montrer que l'ensemble $\{\, u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\,\}$ admet un plus grand élément.

Exercice 3 Théorème de Cesàro
a) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\ .$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ.
b) Donner un exemple de suite divergente $(u_n)_{n\geqslant 1}$ telle que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Exercice 4 Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée : on pose $\alpha = \sup(A)$.
a) Montrer qu'il existe une suite croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers α.
b) On suppose que $\alpha \notin A$. Montrer qu'il existe une suite **strictement** croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers α.

2 Quelques suites usuelles

Suite arithmétique : elle vérifie la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où r est un réel fixé appelé la *raison* de la suite. On montre par récurrence que $u_n = u_0 + r\,n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc si $r = 0$ elle est constante, et sinon on a suivant le signe de r :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty\ .$$

Suite suite géométrique : c'est une suite vérifiant la relation de récurrence : $u_{n+1} = r\,u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où r est un réel fixé également appelé la *raison* de la suite. On montre par récurrence que $u_n = u_0\,r^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc :
- si $r = 1$ elle est constante, donc converge vers u_0
- si $|\,r\,| < 1$ ou si $u_0 = 0$, elle converge vers 0
- si $u_0 \neq 0$ et $r \leqslant -1$, elle n'admet pas de limite (réelle ou infinie)
- si $u_0 \neq 0$ et $r > 1$, on a suivant le signe de u_0 :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty\ .$$

Exercice 5 Soient k et r deux réels avec $k \neq 1$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant la relation de récurrence : $u_{n+1} = k\,u_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique réel a tel que : $a = k\,a + r$ et, en considérant la suite auxiliaire définie par : $v_n = u_n - a$, exprimer u_n en fonction de k, r et n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire le comportement de (u_n) en fonction de k, r et u_0.

Exercice 6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $a \in [\,0\,,\,+\infty]$ tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a\ .$$

a) On suppose que $a > 1$. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
b) On suppose que $a < 1$. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
c) Montrer par des exemples que si $a = 1$, on ne peut pas conclure.

3 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition 5 *Le réel ℓ est appelé une valeur d'adhérence de la suite (u_n) si pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout entier N, il existe un rang $n > N$ tel que : $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.*

Exercice 7 Écrire avec des quantificateurs et des connecteurs logiques les énoncés : “la suite (u_n) converge vers ℓ” et “la suite (u_n) admet ℓ comme valeur d'adhérence”. Laquelle des deux propriétés implique l'autre ?

Définition 6 *La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Proposition 2 *Le réel ℓ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) si et seulement si il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers ℓ.*

Proposition 3 *Si la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers ℓ.*

Exercice 8 Montrer que si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Théorème 7 (Bolzano-Weierstrass) *De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Dans le langage des espaces métriques, cela signifie que tout *segment* (c'est à dire intervalle fermé et borné) de $\mathbb{R}$ est *compact*.

Exercice 9 Soient $a_0 < b_0$ deux réels et soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle telle que :

$$a_0 \leqslant u_n \leqslant b_0 \qquad \text{pour tout entier } n \geqslant n_0 \quad .$$

a) On pose : $\quad E_0^- = \left\{\ n \in \mathbb{N}\ /\ n > n_0 \ \text{ et } \ a_0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{a_0 + b_0}{2}\ \right\}$ $\quad$ et :

$$E_0^+ = \left\{\ n \in \mathbb{N}\ /\ n > n_0 \ \text{ et } \ \frac{a_0 + b_0}{2} \leqslant u_n \leqslant b_0\ \right\} \quad .$$

Montrer que l'un des deux ensembles E_0^- ou E_0^+ est infini. Si E_0^- est infini, on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ et on choisit un entier $n_1 \in E_0^-$, et sinon on pose $b_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$ et on choisit un entier $n_1 \in E_0^+$.
b) Montrer par récurrence qu'on peut ainsi construire deux suites réelles $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et

une suite d'entiers $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telles que $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et pour tout entier naturel p on a : $b_{p+1} - a_{p+1} = \dfrac{b_p - a_p}{2}$ et l'ensemble $E_p = \left\{ n \in \mathbb{N} \ / \ n > n_p \ \text{ et } \ a_p \leqslant u_n \leqslant b_p \right\}$ est infini.
c) Montrer que les suites $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et que :

$$\lim_{p\to+\infty} u_{n_p} = \ell \ .$$

En déduire le théorème de Bolzano-Weierstrass.

4 Étude des suites récurrentes et théorème du point fixe

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application telle que $f(I) \subset I$ (on dit que I est *stable* par f). En choisissant un premier terme $u_0 \in I$, on peut donc définir une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (pour le cas où on ne suppose pas I stable par f , on pourra consulter la première épreuve du CAPES 1998).

Théorème 8 *Si (u_n) converge vers $\ell \in I$ et si f est continue au point ℓ , alors on a : $f(\ell) = \ell$, c'est à dire que ℓ est un point fixe de f .*

Définition 7 *S'il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que : $|\,f(x) - f(y)\,| \leqslant k \ \ |x - y|$ pour tous x , $y \in I$, on dit que f est lipschitzienne de rapport k . Une fonction lipschitzienne de rapport $k < 1$ est dite contractante.*

Cela implique que f est (uniformément) continue sur I , et si f est de plus dérivable, la façon la plus simple de montrer que f est k-lipschitzienne est d'utiliser le théorème des accroissements finis en montrant que pour tout $x \in I$, on a : $|\ f'(x)\ | \leqslant k$. Un résultat fondamental en analyse est le théorème suivant.

Théorème 9 Théorème du point fixe. *Si $I = [\,a\,,\,b\,]$ est un segment et si f est continue, alors f admet au moins un point fixe. Si de plus f est contractante, ce point fixe est unique et toute suite récurrente associée à f converge vers ce point fixe.*

Théorème 10 *Si la fonction f est croissante, la suite (u_n) est monotone. Elle est croissante si $u_1 - u_0$ est positif, décroissante sinon.*

Si f est décroissante, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, l'une est croissante et l'autre est décroissante.

Si f est continue et décroissante, l'étude des points fixes de $f \circ f$ permet de déterminer les limites éventuelles des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) . Si on montre qu'elles sont adjacentes, on en conclut que la suite (u_n) est convergente.

Vitesse de convergence. Supposons que f est de classe C^1 et que α est un point fixe de f .
- Si on a : $|\,f'(\alpha)\,| < 1$, la continuité de f' et le théorème des accroissements finis permettent de montrer qu'il existe un segment non trivial J centré en α sur lequel f est contractante, et le théorème du point fixe montre que si $u_0 \in J$, la suite (u_n) converge vers α : on dit que α est un *point fixe attractif* et que la suite (u_n) converge vers α de façon *géométrique*.
- Si on a : $|\,f'(\alpha)\,| > 1$, on montre de même qu'il existe un réel $k > 1$ un segment non trivial J centré en α tels que : $|\ f(x) - f(y)\ | \geqslant k \ \ |\ x - y\ |$ pour tous x , $y \in I$, ce qui permet de montrer (par l'absurde) que la suite (u_n) ne peut converger vers α que si $u_0 = \alpha$, auquel cas elle est constante. On dit dans ce cas que α est un *point fixe répulsif*.
- Si on a : $|\,f'(\alpha)\,| = 1$, on ne peut pas conclure comme le montre l'exemple suivant.

Exercice 10 Montrer que toute suite (u_n) définie par $u_0 \in [0\,,\,\pi]$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est convergente, alors que toute suite (v_n) définie par $v_0 > 0$ et $v_{n+1} = \sinh(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est divergente.

- Si f est de classe C^2 et : $f'(\alpha) = 0$, on se trouve dans le cas particulier important d'un *point fixe superattractif*. La continuité de f'' et la formule de Taylor-Lagrange permettent de montrer qu'il existe un réel $k \geqslant 0$ et un segment non trivial J centré en α et stable par f tels que : $|f(x) - f(y)| \leqslant k \ |x - y|^2$ pour tous x, $y \in I$. Si $u_0 \in J$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant k \ |u_n - \alpha|^2 \ .$$

Exercice 11 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{k} \left(k \ |u_0 - \alpha| \right)^{2^n} \ .$$

Dans ce cas, la convergence de (u_n) vers α est beaucoup plus rapide que la simple convergence géométrique, et on parle de *convergence quadratique*. C'est en particulier le cas quand on applique la *méthode de Newton* (basée sur l'approximation d'une courbe par ses tangentes) à la résolution de l'équation $h(x) = 0$ quand h est de classe C^3.

5 Exercices complémentaires

Exercice 12 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que l'ensemble $\mathcal{V} = \{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ est fini.
a) Montrer que la suite (u_n) est convergente si et seulement si elle est stationnaire.
b) Pour tout $x \in \mathcal{V}$ on pose : $\mathcal{R}_x = \{ n \in \mathbb{N} \ / \ u_n = x \}$. Montrer qu'un réel ℓ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) si et seulement si $\ell \in \mathcal{V}$ et l'ensemble $\mathcal{R}_\ell$ est infini.

Exercice 13 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Montrer que (u_n) converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence *(on pourra raisonner par l'absurde)*. Est-ce vrai si on ne suppose pas (u_n) bornée ?

Exercice 14 Approximation d'une racine carrée par la méthode de Héron.
Soient a et r deux réels strictement positifs.
a) Montrer qu'on peut définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = r$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n} \right) \ .$$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et qu'elle converge vers $\sqrt{a}$.
c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2\,u_n} \left(u_n - \sqrt{a} \right)^2 \ .$$

d) On choisit $a = r = 2$: montrer que (u_n) est une suite de Cauchy de rationnels mais qu'elle n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant \ u_n - \sqrt{2} \ \leqslant \ 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2} \right)^{2^n} \ .$$

Combien de termes de cette suite suffit-il de calculer pour obtenir les 10 premières décimales du nombre $\sqrt{2}$? Les 100 premières décimales ?