Universités Paris 6 et Paris 7 — Analyse (UE 3)
M1 MEEF — 2013-2014

Chapitre 3 : Fonctions d'une variable réelle (1)

1 Langage topologique dans $\mathbb{R}$

Définition 1 *Soit a un point de $\mathbb{R}$. Un ensemble $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de a s'il existe un réel $r > 0$ tel que : $]\, a - r\, ,\, a + r\, [\subset V$.*

Définition 2 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Un point $x \in \mathbb{R}$ est adhérent à A si tout voisinage de x contient un point de A. L'ensemble $\overline{A}$ des points adhérents à A est appelé l'adhérence de A et on a : $A \subset \overline{A}$. On dit que A est fermé si on a : $\overline{A} = A$.*

Définition 3 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Un point $x \in \mathbb{R}$ est intérieur à A si A est un voisinage de x. L'ensemble $\overset{\circ}{A}$ des points intérieurs à A est appelé l'intérieur de A et on a : $\overset{\circ}{A} \subset A$. On dit que A est ouvert si on a : $\overset{\circ}{A} = A$.*

2 Limites et continuité

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une application. L'ensemble A, souvent noté D_f, fait "partie intégrante" de f : ainsi, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ et sa restriction f_+ à $\mathbb{R}_+$ sont des objets mathématiques distincts et n'ont pas les mêmes propriétés, puisque f_+ est croissante alors que f ne l'est pas.

Définition 4 *Soit $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à D_f et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ comme limite au point a si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a tel que : $|\, f(x) - \ell\, | < \varepsilon$ pour tout $x \in V \cap D_f$. Dans ce cas, le réel ℓ est unique et on note :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad .$$

Définition 5 *Soit B une partie de $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à $D_f \cap B$. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a en restant dans B si la restriction de f à $B \cap D_f$ admet la limite f au point a. Dans ce cas, on note :*

$$\ell = \lim_{x \to a\, ,\, x \in B} f(x) \quad .$$

Si on a respectivement $B =]\, a\, , +\infty\, [$, $B =]\, -\infty\, ,\, a\, [$ ou $B = \mathbb{R} \setminus \{a\}$, on note ainsi :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a\, ,\, x > a} f(x) \quad , \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a\, ,\, x < a} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a\, ,\, x \neq a} f(x)$$

et les deux premières sont appelées la *limite à droite* et la *limite à gauche* de f au point a. La troisième est souvent utilisée comme définition de la limite au niveau universitaire (alors que nous adoptons ici les conventions utilisées au lycée), ce qui rend moins tautologique la définition suivante.

Définition 6 *Soit a un point de D_f. On dit que f est continue au point a si f admet $f(a)$ comme limite au point a.*

En effet, si f est définie au point a et admet une limite en ce point, cette limite ne peut être que $f(a)$ d'après notre définition, contrairement au cas suivant.

Définition 7 *Soit a un point de D_f. On dit que f est continue à droite (resp. à gauche) au point a si f admet $f(a)$ comme limite à droite (resp. à gauche) au point a.*

Proposition 1 *Soit a un point de D_f . La fonction f en continue en a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche au point a .*

Définition 8 *On dit que la fonction f est continue si elle est continue en tout point de son domaine de définition D_f .*

Théorème 1 *Soit a un point de D_f . La fonction f est continue au point a si et seulement si : pour toute suite (u_n) à valeurs dans D_f convergeant vers a , la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.*

Exercice 1 Démontrer ce théorème : pour la réciproque, on pourra raisonner par contraposée.

Définition 9 *On suppose qu'il existe un réel c tel que D_f contient l'inervalle $]\,c\,,\,+\infty\,[$, et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ comme limite en $+\infty$ si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel A tel que : pour tout $x \in D_f$ vérifiant $x > A$, on a : $|\,f(x) - \ell\,| < \varepsilon$. On note alors :*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \quad .$$

Exercice 2 Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à D_f . Écrire les définitions de :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \quad , \quad \lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad .$$

Exercice 3 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f\,:\,I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone.
a) Montrer qu'en tout point intérieur à I , la fonction f admet une limite à droite et une limite à gauche. Que se passe-t-il aux bornes de l'intervalle ?
b) On suppose que $f(I)$ est un intervalle. Montrer que f est continue (on pourra raisonner par contraposée).

3 Fonctions continues sur un intervalle

Théorème 2 Théorème des valeurs intermédiaires. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f\,:\,I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.*

En d'autres termes, pour tous points a , $b \in I$ et tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que : $f(c) = \lambda$.

Théorème 3 Théorème de la bijection monotone. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f\,:\,I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors f définit une bijection de I dans l'intervalle $J = f(I)$ et sa bijection réciproque $f^{-1}\,:\,J \to \mathbb{R}$ est continue et a la même monotonie que f .*

Théorème 4 Théorème sur l'image d'un segment. *Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et soit $f\,:\,I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f(I)$ est un segment.*

En d'autres termes, toute fonction continue sur un segment (intervalle fermé et borné) est bornée et atteint ses bornes.

Définition 10 *Soit $f\,:\,D_f \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est uniformément continue si : pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tous point x , $y \in D_f$ vérifiant $|\,x - y\,| < \delta$, on a : $|\,f(x) - \ell\,| < \varepsilon$.*

Théorème 5 Théorème de Heine. *Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et soit $f\,:\,I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue.*

Exercice 4 Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $a < b$ deux points de I vérifiant $f(a) < f(b)$ et soit λ un réel tel que : $f(a) < \lambda < f(b)$. On pose :

$$A = \{x \in [a, b] \,/\, f(x) < \lambda\} .$$

a) Montrer que A admet une borne supérieure $c \in [a, b]$ et qu'on a : $f(c) \leqslant \lambda$.
b) Montrer que $a < c < b$ et que pour tout $x \in]c, b]$ on a : $f(x) \geqslant \lambda$.
c) En déduire le théorème des valeurs intermédiaires.
d) En déduire le théorème de la bijection monotone.

Exercice 5 Démonstration du théorème sur l'image d'un segment.
Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
a) On suppose que f n'est pas majorée : montrer qu'il existe une suite (x_n) de points de $[a, b]$ telle que $f(x_n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass, obtenir une contradiction. En déduire que f est bornée.
b) On pose $M = \sup(f)$: montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de points de $[a, b]$ vérifiant :

$$f(x_n) > M - \frac{1}{n} \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 1 .$$

En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass, obtenir une contradiction. En déduire que f atteint ses bornes.

Exercice 6 Démonstration du théorème de Heine.
Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f n'est pas uniformément continue.
a) Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ de points de $[a, b]$ vérifiant :

$$|\, f(x_n) - f(y_n) \,| \geqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad |\, x_n - y_n \,| < \frac{1}{n} \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 1 .$$

b) Montrer qu'il existe une suite $(x_{\sigma(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ extraite de $(x_n)_{n\geqslant 1}$ qui converge vers un point $c \in [a, b]$. Montrer que la suite $(y_{\sigma(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers c.
c) En utilisant la continuité de f au point c, obtenir une contradiction. Conclure.

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui admet des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est bornée.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
a) Si I est un intervalle ouvert, alors $f(I)$ est un intervalle ouvert.
b) Si I est un intervalle fermé, alors $f(I)$ est un intervalle fermé.
c) Si I est un intervalle ouvert, alors $f^{-1}(I)$ est un intervalle ouvert.
d) Si I est un intervalle fermé, alors $f^{-1}(I)$ est un intervalle fermé.

Exercice 9 Soit $T > 0$ un réel et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique.
a) Montrer que si f est monotone, alors elle est constante.
b) Montrer que si f admet une limite en $+\infty$ ou en $-\infty$, alors elle est constante.
c) Montrer que si f est continue, alors elle est bornée et atteint ses bornes.
d) Montrer que si f est continue, alors elle est uniformément continue.

4 Dérivation

Définition 11 *Soit a un point de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un voisinage V de a. On dit que f est dérivable en a si la fonction $g : V \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite réelle au point a. Cette limite se note alors $f'(a)$ et est appelée la dérivée de f en a. On dit que f est dérivable si D_f est ouvert et f est dérivable en tout point de D_f.

Proposition 2 *Si f est dérivable au point a, alors elle est continue en a.*

En effet, pour tout $x \in D_f \setminus \{a\}$ on a : $|\, f(x) - f(a)\,| = |\, g(x)\,|\,|\, x - a\,|$ et si g admet une limite au point a, elle est bornée au voisinage (épointé) de a ce qui montre qu'il existe une constante positive C telle que pour tout point $x \neq a$ assez proche de a, on a :

$$|\, f(x) - f(a)\,| \leqslant C\ |x - a|$$

donc $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a. La réciproque est bien sûr fausse, et on peut même construire des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui ne sont dérivables en aucun point.

Les théorèmes ci-dessous reposent sur la remarque fondamentale suivante.

Proposition 3 *Si f est dérivable en a et admet un extremum local au point a , alors on a :*

$$f'(a) = 0\,.$$

Remarquons tout d'abord qu'il est essentiel ici que le domaine de définition D_f soit un **ouvert**. En effet, la fonction $f : [0\,,\,1]$ définie par $f(x) = x$ admet des extrema (globaux) en 0 et en 1, mais sa dérivée ne s'annule nulle part ! Pour prouver ce résultat, on raisonne par contraposée en supposant $f'(a) \neq 0$. La fonction g est alors de signe constant (celui de $f'(a)$) sur $V' \setminus \{a\}$ où V' est un voisinage de a et on a : $f(x) - f(a) = g(x)\,(x - a)$ pour tout $x \in V' \setminus \{a\}$ donc la fonction $f - f(a)$ change de signe sur tout voisinage de a donc f ne peut pas avoir d'extremum local au point a.

Théorème 6 Théorème de Rolle. *Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est dérivable sur $]\,a\,,\,b\,[$. Si on a : $f(a) = f(b)$, alors il existe un réel $c \in]\,a\,,\,b\,[$ tel que : $f'(c) = 0$.*

Théorème 7 Théorème des accroissements finis. *Soient $a\,,\,b$ deux réels tels que $a < b$ et soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est dérivable sur $]\,a\,,\,b\,[$. Il existe un réel $c \in]\,a\,,\,b\,[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b - a)\,f'(c)$.*

Théorème 8 Théorème sur le sens de variation. *Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est dérivable à l'intérieur de I. Alors :*

1) f est constante si et seulement si on a : $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$,

2) f est croissante si et seulement si on a : $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$,

3) si on a : $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$, alors f est strictement croissante.

En changeant f en $-f$, on en déduit les cas de décroissance en renversant les inégalités, et il faut noter que le troisième point d'admet pas de réciproque comme le montre l'exemple de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$.

Exercice 10 Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est dérivable sur $]\,a\,,\,b\,[$. On suppose que $f'x) \geqslant 0$ pour tout $x \in]\,a\,,\,b\,[$ et que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de $]\,a\,,\,b\,[$. Montrer que f est strictement croissante.

Définition 12 *Soient a, r deux réels tels que $r > 0$ et soit $f : [a\,, a+r\,[\to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable à droite en a si la fonction $g :]\,a\,, a+r\,[\to \mathbb{R}$ définie par :*

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite à droite réelle au point a. Cette limite se note alors $f'_d(a)$ et est appelée la dérivée à droite de f en a.

On définit de même la dérivée à gauche, et une fonction f définie au voisinage de a est donc dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Exercice 11 Soient a, r deux réels tels que $r > 0$ et soit $f : [a\,, a+r\,[\to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est dérivable sur $]\,a\,, a+r\,[$. On suppose que sa fonction dérivée f' admet au point a une limite à droite réelle ℓ. Montrer que f est dérivable à droite en a et que $f'_d(a) = \ell$.

Exercice 12 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? En donner une démonstration ou un contre-exemple.
a) Si f admet un minimum local au point a, alors il existe un réel $r > 0$ tel que f soit décroissante sur $]\,a - r\,, a]$ et croissante sur $[a\,, a + r\,[$.
b) Si f admet une limite finie en $+\infty$, alors f' tend vers 0 en $+\infty$.
c) Si f' admet une limite finie ℓ en $+\infty$, alors on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$.

5 Dérivées d'ordre supérieur

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application.

Définition 13 *On dit que f est continûment dérivable (ou de classe C^1) si elle est dérivable et si la fonction f' est continue.*

On dit que f est deux fois dérivable si f est dérivable et si la fonction f' est dérivable : sa dérivée notée f'' ou encore $f^{(2)}$ est alors appelée la dérivée seconde de f. Plus généralement, les dérivées successives sont définies de manière récursive en posant $f^{(0)} = f$:

Définition 14 *Pour tout entier $n \geqslant 1$, on dit que f est n fois dérivable si f est $n-1$ fois dérivable et si la fonction $f^{(n-1)}$ est dérivable : sa dérivée $f^{(n)} = f^{(n-1)\,\prime}$ est alors appelée la dérivée n-ième de f. On dit que f est de classe C^n si elle est n fois dérivable et si la fonction $f^{(n)}$ est continue.*

Nous avons supposé connues les règles de calcul sur les limites, les fonctions continues et les fonctions dérivables (qu'il est commode d'appeler "théorèmes généraux" dans une copie). Rappelons cependant :

Proposition 4 Formule de Leibniz. *Soit n un entier naturel. Si les fonctions f, $g : I \to \mathbb{R}$ sont n fois dérivables, alors la fonction $f\,g$ est n fois dérivable et on a :*

$$(f\,g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)} .$$

6 Exercices complémentaires

Exercice 13 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1/x$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
a) Montrer que f est bijective.
b) Montrer que f est continue en 1 et en -1.
c) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\,, 1\}$: montrer que f n'est pas continue en a.

Exercice 14 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soient $f\,,\,g\ :\ I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que les fonctions $\min(f\,,\,g)$ et $\max(f\,,\,g)$ sont continues.

Exercice 15 Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{pour tous } x\,,\,y \in \mathbb{R}\,.$$

a) Montrer qu'on a : $f(n) = n\,f(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) Montrer qu'on a : $f(p) = p\,f(1)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
c) Montrer qu'on a : $f(r) = r\,f(1)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.
d) Montrer qu'on a : $f(x) = x\,f(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En conclure que f est linéaire.

Exercice 16 Soit $f\ :\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'il existe un réel $\ell < 1$ vérifiant :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell\,.$$

Montrer qu'il existe un réel $x \in \mathbb{R}_+$ tel que : $f(x) = x$.

Exercice 17 Soit $f\ :\ [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(0) = f(1)$ et soit n un entier naturel non nul. Montrer qu'il existe un réel $c \in \left[0\,,\,1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que : $f\left(c + \frac{1}{n}\right) = f(c)$.
Indication : on pourra poser $f_n(x) = f\left(x - \frac{1}{n}\right) - f(x)$ *pour tout* $x \in \left[0\,,\,1 - \frac{1}{n}\right]$ *et exprimer* $f(1) - f(0)$ *à l'aide de la fonction* f_n.

Exercice 18 Soit $f\ :\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0)\,.$$

Montrer qu'il existe un réel $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $f'(x_0) = 0$.

Exercice 19 Pour tout entier $n \geqslant 4$, on considère la fonction $f_n\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1\,.$$

a) Montrer qu'il existe un unique réel positif x_n tel que : $f_n(x_n) = 0$.
b) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geqslant 4}$ est croissante et majorée par 1.
c) Montrer que $(x_n)_{n \geqslant 4}$ converge vers l'unique racine positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

Exercice 20 Soit n un entier naturel non nul et soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable admettant n racines distinctes. Montrer que la fonction $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.