Chapitre 4 : Fonctions d'une variable réelle (2)

1 Comparaison des fonctions

Définition 1 *Un ensemble $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) s'il existe un réel c tel que $]\,c\,,\,+\infty\,[\,\subset V$ (resp. $]\,-\infty\,,\,c\,[\,\subset V$).*

Définition 2 Notation de Landau *Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\,,\,+\infty\}$ et soient f et g deux fonctions réelles toutes les deux définies sur $V \setminus \{a\}$ où V est un voisinage de a.*

- On dit que f est dominée par g et on écrit $f = O(g)$ au voisinage de a s'il existe un voisinage $V' \subset V$ de a et une constante $C \geqslant 0$ vérifiant :

$$|\,f(x)\,| \leqslant C\ \ |\,g(x)\,| \quad \text{pour tout } x \in V' \setminus \{a\}\ .$$

- On dit que f est négligeable devant g et on écrit $f = o(g)$ au voisinage de a s'il existe un voisinage $V' \subset V$ de a et une fonction $\varepsilon\,:\,V' \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(x) \,=\, \varepsilon(x)\, g(x) \quad \text{pour tout } x \in V' \setminus \{a\} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0\,.$$

- On dit que f est équivalente à g et on écrit $f \sim g$ au voisinage de a s'il existe un voisinage $V' \subset V$ de a et une fonction $\varepsilon\,:\,V' \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(x) \,=\, \big(1+\varepsilon(x)\big)\, g(x) \quad \text{pour tout } x \in V' \setminus \{a\} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0\,.$$

Les mêmes définitions s'appliquent aux suites numériques au voisinage de $+\infty$.

Exercice 1 **a)** Qu'impliquent ces définitions si $g = 0$?
b) Que deviennent ces définitions si on suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a ?

Exercice 2 Écrire avec les notations de Landau les propriétés suivantes.
a) f est bornée au voisinage de a.
b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.
c) f est dérivable au point $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 **a)** Ces relations sont-elles réflexives ? symétriques ? transitives ?
b) Comment se comportent-elles vis à vis des quatre opérations ?
c) Si f et g vérifient l'une de ces relations, en est-il de même pour les fonctions e^f et e^g ? Pour les fonctions $\ln(f)$ et $\ln(g)$? pour les fonctions $|\,f\,|$ et $|\,g\,|$?

Exercice 4 Montrer que $f \sim g$ si et seulement si : $f - g = o(g)$ au voisinage de a.

2 Formules de Taylor

Par ordre croissant de régularité, on a les trois théorèmes suivants.

Théorème 1 Formule de Taylor-Young. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, soit a un point de I et soit n un entier naturel. Si la fonction $f\,:\,I \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable au point a, on a pour tout x au voisinage de a :*

$$f(x) \,=\, \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}\,(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big)\ .$$

Théorème 2 Formule de Taylor-Lagrange. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, soient $a < b$ deux point de I et soit n un entier naturel non nul. Si la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^{n-1} sur I et n fois dérivable sur $]\,a\,,\,b\,[$, alors il existe un point $c \in]\,a\,,\,b\,[$ tel que :*

$$f(b) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}}{k\,!}\,(b-a)^k + \frac{(b-a)^n}{n\,!}\, f^{(n)}(c)\ .$$

Théorème 3 Formule de Taylor avec reste intégral. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, soient $a < b$ deux point de I et soit n un entier naturel non nul. Si la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^n sur I, alors on a :*

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}\,(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)\,!}\, f^{(n)}(t)\,dt\ .$$

La formule de Taylor avec reste intégral se démontre par récurrence en intégrant par parties et celle de Taylor-Young se démontre par récurrence en intégrant le développement limité de la fonction f'. Pour démontrer la formule de Taylor-Lagrange, on peut supposer $n \geqslant 2$ car le cas $n = 1$ n'est autre que le théorème des accroissements finis. Fixons un réel A et considérons la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) \;=\; f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k\,!}\,(b-x)^k - \frac{(b-x)^n}{n\,!}\,A$$

qui est continue sur I, dérivable sur $]\,a\,,\,b\,[$ et vérifie : $g(b) = 0$. Pour tout $x \in]\,a\,,\,b\,[$, on a :

$$g'(x) \;=\; \big(A - f^{(n)}(x)\big)\,\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

et en choisissant l'unique réel A tel que $g(a) = 0$, le théorème de Rolle permet de conclure.

Exercice 5 Utiliser une formule de Taylor pour :

a) montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $\ln(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}$,

b) développer le polynôme $P = X^3 - 9\,X^2 + 7\,X + 15$ suivant les puissances de $X - 2$,

c) calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$.

3 Développements limités

Définition 3 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, soit a un point de I, soit n un entier naturel et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f admet un développement limité (D.L.) à l'ordre n en a s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}\,[X]$ de degré inférieur ou égal à n tel que :*

$$f(x) = P(x-a) + o\big((x-a)^n\big) \qquad \text{au voisinage de } a\ .$$

Exercice 6 Montrer que s'il existe, le polynôme P est unique : on l'appelle la *partie principale* du développement.

Exercice 7 Que signifie pour une fonction d'avoir en un point un D.L. d'ordre 0 ? un D.L. d'ordre 1 ? On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et :

$$f(x) = x^3 \,\sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{si } x \neq 0\,.$$

Montrer que f admet un D.L. d'ordre 2 en 0 mais qu'elle n'est pas deux fois dérivable en 0.

Par translation, on peut toujours se ramener à un D.L. en 0 et on écrit usuellement :

$$f(a+h) = P(h) + o(h^n) \quad \text{au voisinage de } 0\ .$$

Quand les dérivées successives de f sont faciles à calculer, la formule de Taylor-Young permet bien sûr d'obtenir le développement limité de f , mais son principal intérêt est en général de montrer son existence et pour le calculer on utilise la plupart du temps les formules ci-dessous et les développements usuels qui doivent être connus !

Définition 4 *Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$ est un polynôme de de degré inférieur ou égal à n et si $m \in \mathbb{N}$ vérifie $m \leqslant n$, la troncature de P à l'ordre m est le polynôme :*

$$T_m(P) = \sum_{k=0}^{m} a_k\, X^k\ .$$

Proposition 1 *Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0 de partie principale P , alors pour tout entier $m \leqslant n$ elle admet un développement limité à l'ordre m en 0 de partie principale $T_m(P)$.*

Proposition 2 *Soient f et g deux fonctions admettant en 0 des développements limités à l'ordre n de parties principales respectives P et Q , alors :*

- la fonction $f+g$ admet un D.L. à l'ordre n en 0 de partie principale $P+Q$,

- la fonction $f\,g$ admet un D.L. à l'ordre n en 0 de partie principale $T_n(P\,Q)$,

- si $g(0) \neq 0$, la fonction $f\,g$ admet un D.L. à l'ordre n en 0 dont la partie principale est le quotient à l'ordre n de la division suivant les puissances croissantes de P par Q ,

- si $g(0) = 0$, la fonction $f \circ g$ admet un D.L. à l'ordre n en 0 dont la partie principale est $T_n(P \circ Q)$,

- si f est continue au voisinage de a , alors toute primitive de f admet un D.L. à l'ordre $n+1$ en 0 dont la partie principale est une primitive de P .

Définition 5 *On dit que f admet un développement limité au sens fort à l'ordre n en 0 s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n tel que :*

$$f(x) = P(x) + O(x^{n+1}) \quad \textit{au voisinage de } 0\ .$$

Un D.L. au sens fort est donc aussi un D.L. au sens usuel, mais cette notion permet souvent de gagner un ordre dans le calcul d'un D.L. sans calculer le terme suivant. En particulier, si f est $(n+1)$ fois dérivable en 0 , la formule de Taylor-Young montre qu'elle admet un D.L. au sens fort à l'ordre n en 0 . On peut de même gagner un ou plusieurs ordres quand les premiers termes d'un développement sont nuls en le factorisant : voir les exercices ci-dessous.

Proposition 3 **Développements usuels.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a au voisinage de 0 :*

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + O(x^{n+1}) \quad , \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + O(x^{n+1}) \quad , \quad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1}) \quad ,$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, x^{2k}}{(2\,k)!} + O(x^{2\,n+2}) \quad , \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{(2\,k+1)!} + O(x^{2\,n+3}) \quad ,$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2\,k)!} + O(x^{2\,n+2}) \quad , \quad \sinh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2\,k+1)!} + O(x^{2\,n+3}) \quad ,$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k + O(x^{n+1}) \quad \textit{et} \quad \arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2\,k+1}\, x^{2\,k+1} + O(x^{2\,n+3})\ .$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a au voisinage de 0 :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k\,!}\, x^k + O(x^{n+1}) \quad .$$

Exercice 8 Démontrer cette proposition.

Exercice 9 Calculer les développements limités suivants.

a) Développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \tan x$.
b) Développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$.
c) Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$.
d) Développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}$.

Exercice 10 Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$.
b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{2x(e^{\pi x}+1)}\right)$.
c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$.

Exercice 11 Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$.

a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement est de classe C^1.
b) Calculer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0. En admettant (provisoirement) que f est de classe C^∞, en déduire les valeurs de ses dérivées en 0 jusqu'à l'ordre 3.

Exercice 12 Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = x + \ln(1+x)$.

a) Montrer que la fonction f est une bijection de $]-1\,,\,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et que la fonction f^{-1} est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
b) Calculer le développement limité de f^{-1} à l'ordre 3 en 0.