Chapitre 5 : Intégration sur un segment

1 Propriétés générales

Pour la définition des fonctions *intégrables au sens de Riemann* et de leurs intégrales on pourra consulter le polycopié, en notant que seul le cas des fonctions continues par morceaux figure au programme du CAPES.

Définition 1 *Soient $a < b$ deux réels. On appelle* subdivision du segment *$[\,a\,,\,b\,]$ toute suite finie $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ telle que :*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\ .$$

Le réel $\sigma(x) = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}(x_{k+1} - x_k)$ est appelé le pas de la subdivision. *Pour toute fonction $f\ :\ [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$, on appelle* somme de Riemann *associée à cette subdivision toute somme :*

$$S_{x\,,\,c}(f) = \sum_{k=0}^{n}\,(x_{k+1} - x_k)\,f_k(c_k)$$

où $c_k \in [\,x_k\,,\,x_{k+1}\,]$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Définition 2 *Une fonction $f\ :\ [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ est dite* continue par morceaux *s'il existe une subdivision $(y_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, de $[\,a\,,\,b\,]$ dite* adaptée à f, *et pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$ une fonction continue $f_k\ :\ [\,y_k\,,\,y_{k+1}\,] \to \mathbb{R}$ telle que :*

$$f(x) = f_k(x) \qquad \text{pour tout } x \in \,]\,y_k\,,\,y_{k+1}\,[\ .$$

Théorème 1 Sommes de Riemann. *Si $f\ :\ [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, on a :*

$$\lim_{\sigma(x)\to 0} S_{x\,,\,c}(f) = \int_a^b f(t)\,dt$$

où la limite est prise sur l'ensemble des subdivisions de $[\,a\,,\,b\,]$ dont le pas tend vers 0.

Proposition 1 Relation de Chasles. *Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et si $f\ :\ I \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, alors pour tous $a\,,\,b\,,\,c \in I$, on a :*

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt\ .$$

Proposition 2 Linéarité de l'intégrale. *Si les fonctions $f\,,\,g\ :\ [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et si $\lambda\,,\,\mu \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\int_a^b \big(\lambda\,f(t) + \mu\,g(t)\big)\,dt = \lambda\int_a^b f(t)\,dt + \mu\int_a^b g(t)\,dt\ .$$

Proposition 3 Continuité de l'intégrale. *Si $f\ :\ [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, la fonction $F\ :\ [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est continue.

Proposition 4 Positivité de l'intégrale. *Si $f\ :\ [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux et vérifie : $f(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [\,a\,,\,b\,]$, alors on a :*

$$\int_a^b f(t)\,dt\ \geqslant 0\ .$$

2 Cas des fonctions continues

Théorème 2 Intégrales et primitives. *Si la fonction* $f : [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ *est* **continue**, *la fonction* $F : [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$H(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est dérivable et vérifie : $H' = f$.

Exercice 1 Montrer que ce résultat est faux si on suppose seulement que la fonction f est continue par morceaux.

Corollaire 1 *Si* $f : [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ *est continue et si* $F : [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ *est une primitive de* f *, c'est à dire vérifie* $F' = f$ *, alors on on a :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a) \ .$$

Corollaire 2 *Si la fonction* $f : [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ *est* **de classe** C^1, *on a :*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt \ .$$

Exercice 2 Démontrer ces corollaires.

Pour calculer l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, on peut cependant utiliser la relation de Chasles pour obtenir avec les notations de la définition 2 :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f_k(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} F_k(y_{k+1}) - F_k(y_k)$$

où F_k est une primitive de la fonction continue f_k pour chaque $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Proposition 5 *Si* $f : [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ *est* **continue** *et vérifie :* $f(t) \geqslant 0$ *pour tout* $t \in [\,a\,,\,b\,]$ *et* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \ = 0$ *, alors on a :* $f = 0$.

Exercice 3 Montrer que ce résultat est faux si on suppose seulement que la fonction f est continue par morceaux. Le démontrer.

3 Calcul des primitives

Proposition 6 Changement de variable. *Si* $\varphi : [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ *est de classe* C^1 *et si* f *est continue sur le segment* $\varphi([\,a\,,\,b\,])$ *, alors on a :*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt = \int_a^b f(\varphi(s))\,\varphi'(s)\,ds \ .$$

Proposition 7 Intégration par parties. *Si* $u\,,\,v : [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ *sont de classe* C^1 *, on a :*

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)\,v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt \ .$$

Exercice 4 Démontrer ces propositions.

4 Exercices essentiels

Exercice 5 Soit p un entier naturel. En utilisant une somme de Riemann, calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p \ .$$

Exercice 6 Soit $f : [a\,,\, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\, \sin(\lambda\, t)\, dt = 0 \ .$$

Exercice 7 Calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{t\,(\ln^2 t + 1)}$ pour tous réels $b \geqslant a > 1$.

Exercice 8 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt$. En intégrant par parties, trouver une relation entre I_{n+2} et I_n. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

Exercice 9 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt$.

5 Exercices complémentaires

Exercice 10 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx$.

Exercice 11 Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + 2\sin x}\, dx$.

Exercice 12 Soit $f : [0\,,\, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt = \ell$.

Exercice 13 Soient $a < b$ deux réels et $f : [a\,,\, b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b (f(t))^n\, dt \right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{t \in [a\,,\, b]} f(t) \, .$$

Exercice 14 Soient $a < b$ deux réels et $f : [a\,,\, b] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue.

a) Soit n un entier naturel non nul. Montrer qu'il existe d'uniques réels $x_{k\,,\,n}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ avec $a = x_{0\,,\,n} < x_{1\,,\,n} < \cdots < x_{n\,,\,n} = b$ tels que

$$\int_{x_{k-1\,,\,n}}^{x_{k\,,\,n}} f(t)\, dt = \frac{1}{n} \int_a^b f(t)\, dt \qquad \text{pour tout } 1 \leqslant k \leqslant n \, .$$

b) Soit $g : [a\,,\, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(x_{k\,,\,n})$.