Chapitre 6 : Séries numériques

1 Généralités

Définition 1 *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite à valeurs réelles ou complexes. La série de terme général u_n est la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ définie par :*

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k \quad \textit{pour tout entier } n \geqslant n_0$$

appelée les sommes partielles et est notée $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$. **Lorsqu'elle converge***, sa limite*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

est appelée la somme de la série. Dans ce cas, pour tout entier $n \geqslant n_0$ la série $\sum_{p\geqslant n+1} u_p$ est convergente et sa somme R_n est appelée le reste d'ordre n de la série, on a :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = S_n + R_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad \textit{pour tout entier } n \geqslant n_0$$

et la suite $(R_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 0 .

Remarquons que toute suite $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ peut être considérée comme une série en posant $u_{n_0} = v_{n_0}$ et $u_n = v_n - v_{n-1}$ pour tout entier $n > n_0$.

Proposition 1 *Si $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} v_n$ convergent et si $\lambda\,,\,\mu \in \mathbb{C}$, alors $\sum_{n\geqslant n_0} (\lambda\, u_n + \mu\, v_n)$ converge et on a :*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda\, u_n + \mu\, v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n \ .$$

Proposition 2 *Si la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge, la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 0 .*

Quand $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ ne converge pas vers 0 , on dit que la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ *diverge grossièrement.* Si la série converge, on a pour tout entier $n > n_0$ (*transformation d'Abel*) :

$$u_n = S_n - S_{n-1} = R_{n-1} - R_n \ .$$

Proposition 3 *Pour tout $a \in \mathbb{C}$, la série géométrique $\sum a^n$ converge si et seulement si : $|\,a\,| < 1$, et on a dans ce cas : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.*

2 Séries à termes positifs

Si on a : $u_n \geqslant 0$ pour tout entier n, la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est croissante, donc cette série converge si et seulement si cette suite est majorée, et si la série diverge, cette suite tend vers $+\infty$. On en déduit le théorème de comparaison suivant.

Théorème 1 *Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites réelles positives. On suppose qu'il existe un entier naturel $N \geqslant n_0$ tel que : $u_n \leqslant v_n$ pour tout entier $n \geqslant N$.*
- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Corollaire 1 *Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites réelles positives telles que : $u_n = O(v_n)$ quand n tend vers $+\infty$. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.*

Corollaire 2 *Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites réelles positives telles que : $u_n \sim v_n$ quand n tend vers $+\infty$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Exercice 1 Montrer que $\dfrac{1}{n} \sim \ln(n+1) - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$ et en déduire que la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Exercice 2 Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a : $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$ et en déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Proposition 4 Règle de Cauchy *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle positive telle que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(u_n\right)^{\frac{1}{n}} = \ell \in \mathbb{R}_+ .$$

- Si $\ell < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Proposition 5 Règle de d'Alembert *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle strictement positive telle que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+ .$$

- Si $\ell < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Dans les deux cas, on ne peut pas conclure si $\ell = 1$ comme le montrent les exemples de $u_n = 1/n^2$ et $v_n = n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Proposition 6 Critère de Riemann *Pour tout réel α, la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si : $\alpha > 1$.*

Exercice 3 Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$ et tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^\alpha}$$

et en déduire le critère de Riemann.

3 Séries absolument convergentes

Définition 2 *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle ou complexe. On dit que la série* $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ *converge absolument si la série* $\sum_{n\geqslant n_0} |u_n|$ *converge.*

Théorème 2 *Toute série absolument convergente est convergente.*

Ceci permet d'appliquer les critères de la section précédente aux séries à termes de signe quelconque pour montrer leur convergence *absolue*.

Théorème 3 *Soient* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *deux séries absolument convergentes. Leur produit de Cauchy est la série de terme général* $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$ *, elle est absolument convergente et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\Big).$$

4 Séries semi-convergentes

Théorème 4 Critère spécial des séries alternées *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle positive* **décroissante** *convergeant vers 0. Alors la série de terme général $(-1)^n u_n$ est convergente, son reste* $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ *est du signe de $(-1)^{n+1}$ et : $|R_n| \leqslant u_{n+1}$ pour tout $n \geqslant n_0$.*

Exercice 4 Démontrer ce théorème en montrant que les suites définies par :

$$a_n = \sum_{k=n_0}^{2n+1} (-1)^k\, u_k \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{k=n_0}^{2n} (-1)^k\, u_k$$

sont adjacentes.

5 Exercices classiques

Exercice 5 Étudier la convergence des séries de terme généraux suivants :

a) $\dfrac{1+(-1)^n\, n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

b) $\ln\Big(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big)$

c) $\dfrac{n^3}{n!}$

d) $\Big(\alpha+\dfrac{1}{n}\Big)^n$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 6 Formule de Stirling. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $u_n = e^n (n!) n^{-(n+\frac{1}{2})}$ et $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. Montrer que la série $\sum v_n$ converge. En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ tel que :

$$n! \sim K \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

Exercice 7 Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout n. On suppose que les séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent. Montrer que la série $\sum v_n$ converge.