Chapitre 7 : Intégration sur un intervalle quelconque

1 Fonctions intégrables

Définition 1 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux. On dit que f est intégrable sur I si l'ensemble $\left\{ \int_J f(t)\,dt \,/\, J \subset I \text{ est un segment } \right\}$ est majoré, et on note alors :*

$$\int_I f(t)\,dt = \sup_{J \subset I \text{ est un segment}} \int_J f(t)\,dt\ .$$

Si I est un segment, on retrouve donc la notion d'*intégrale définie*, mais si par exemple $I = [\,a\,,\,b\,[$ avec $a \in \mathbb{R}\,,\ b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $a < b$, la *convergence* de cette *intégrale impropre* équivaut à l'existence de la limite :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\substack{b' \to b \\ b' \in I}} \int_a^{b'} f(t)\,dt$$

puisque l'intégrale de f sur le segment $[a\,,\,b'\,]$ est croissante par rapport à b', et si on a : $I =]\,a\,,\,b\,[$ avec $a\,,\,b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\,,\,+\infty\}$ et $a < b$, elle équivaut à l'existence de la limite :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\substack{a' \to a\,,\,b' \to b \\ a'\,,\,b' \in I}} \int_{a'}^{b'} f(t)\,dt\ .$$

Définition 2 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. On dit que f est intégrable sur I si la fonction $|\,f\,|$ est intégrable. Dans ce cas, on peut poser :*

$$\int_I f(t)\,dt = \lim_{\substack{a' \to \inf I\,,\,b' \to \sup I \\ a' \in I\,,\,b' \in I}} \int_{a'}^{b'} f(t)\,dt\ .$$

On ne considère donc ici que des intégrales *absolument convergentes*, et la fonction f est intégrable sur I si et seulement si elle est intégrable au voisinage des bornes **ouvertes** de I comme l'exprime la proposition suivante.

Proposition 1 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et soient $c\,,\,d$ deux points de I. La fonction f est intégrable sur I si et seulement si elle est intégrable sur $I_- = I \cap]-\infty\,,\,c\,]$ et sur $I_+ = I \cap [\,d\,,\,+\infty\,[$ et on a dans ce cas :*

$$\int_I f(t)\,dt = \int_{I_-} f(t)\,dt + \int_c^d f(t)\,dt + \int_{I_+} f(t)\,dt\ .$$

Pour étudier l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle quelconque, on peut donc toujours se ramener à l'étude de la convergence de l'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle semi-ouvert.

Proposition 2 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soient $f\,,\,g : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues par morceaux et intégrables sur I et soient $\lambda\,,\,\mu \in \mathbb{C}$. Alors la fonction $\lambda\,f + \mu\,g$ est intégrable sur I et on a :*

$$\int_I \lambda\,f(t) + \mu\,g(t)\,dt = \lambda \int_I f(t)\,dt + \mu \int_I g(t)\,dt\ .$$

Proposition 3 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soient $f\,,\, g\,:\, I \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues par morceaux telles que $|\,f(x)\,| \leqslant |\,g(x)\,|$ pour tout $x \in I$. Si g est intégrable sur I , alors f est intégrable sur I .*

Corollaire 1 *Soient $f\,,\, g\,:\, [\,a\,,\, b\,[\to \mathbb{C}$ deux fonctions continues par morceaux.*
- *Si $f = O(g)$ au voisinage de b et si g est intégrable sur $[\,a\,,\, b\,[$, alors f l'est aussi.*
- *Si $|\,f\,| \sim |\,g\,|$ au voisinage de b , alors f est intégrable sur $[\,a\,,\, b\,[$ si et seulement si g l'est.*

On a bien sûr les mêmes résultats si $I =]\,a\,,\, b\,]$ en comparant les fonctions au voisinage de a .

Exemple 1 La fonction $t \mapsto e^t$ est intégrable sur $\mathbb{R}_-$ et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple 2 Intégrales de Riemann La fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$ est intégrable sur $[\,1\,,\, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$, et elle est intégrable sur $]\,0\,,\, 1\,]$ si et seulement si $\alpha < 1$. L'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est donc divergente pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple 3 La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]\,0\,,\, 1\,]$.

Exercice 1 Intégrales de Bertrand Montrer que la fonction $t \mapsto t^{-\alpha}\,(\ln t)^{-\beta}$ est intégrable sur $[\,1\,,\, +\infty[$ si et seulement si : $\alpha > 1$ ou : $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 2 Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[a\,,\, b\,[$. Montrer que :

$$\lim_{x \to b^-} \int_x^b f(t)\, dt = 0\,.$$

Exercice 3 Soit $f\,:\, \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante et continue par morceaux. Montrer que f est intégrable sur $[\,0\,,\, +\infty[$ si et seulement si la série de terme général $f(n)$ est convergente.

2 Théorèmes de convergence

Théorème 1 Théorème de convergence dominée *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I . On suppose que :*
- *pour tout $t \in I$, la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente : on note $f(t)$ sa limite,*
- *la fonction f est continue par morceaux sur I ,*
- *il existe une fonction $\varphi\,:\, I \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :*

$$|\,f_n(t)\,| \leqslant \varphi(t) \qquad \textit{pour tout } t \in I \textit{ et tout } n \in \mathbb{N}\,.$$

Alors f et toutes les fonctions f_n pour $n \in \mathbb{N}$ sont intégrables sur I et on a :

$$\int_I f(t)\, dt \;=\; \lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(t)\, dt\ .$$

Théorème 2 Intégration terme à terme *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur un intervalle I . On suppose que :*
- *pour tout $t \in I$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)$ est convergente : on note $f(t)$ sa somme,*
- *la fonction f est continue par morceaux sur I ,*
- *la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I |\,f_n(t)\,|\; dt$ est convergente.*

Alors la fonction f est intégrable sur I et on a :

$$\int_I f(t)\, dt \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\, dt\ .$$

Exercice 4 Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t^n}\, dt$.

Exercice 5 Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{n} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$.

3 Intégrales dépendant d'un paramètre

Soient Ω, I deux intervalles et soit $f : \Omega\times I \to \mathbb{C}$ une fonction. Pour tout $x\in\Omega$ on pose :

$$F(x) = \int_I f(x\,,\,t)\,dt\ .$$

Théorème 3 Théorème de continuité *On suppose que :*
- pour tout $x\in\Omega$ la fonction $t\mapsto f(x\,,\,t)$ est continue par morceaux sur I ,
- pour tout $t\in I$ la fonction $x\mapsto f(x\,,\,t)$ est continue sur Ω ,
- il existe une fonction $\varphi : I\to\mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$|\,f(x\,,\,t)\,|\leqslant \varphi(t) \qquad \textit{pour tout } (x\,,\,t)\in\Omega\times I\,.$$

Alors la fonction F est définie et continue sur Ω .

Théorème 4 Théorème de Leibniz *On suppose que :*
- pour tout $x\in\Omega$ la fonction $t\mapsto f(x\,,\,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ,
- pour tout $t\in I$ la fonction $x\mapsto f(x\,,\,t)$ est de classe C^1 sur Ω : on note $\partial_x f$ sa dérivée,
- pour tout $x\in\Omega$ la fonction $t\mapsto \partial_x f(x\,,\,t)$ est continue par morceaux sur I ,
- il existe une fonction $\varphi : I\to\mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$|\,\partial_x f(x\,,\,t)\,|\leqslant \varphi(t) \qquad \textit{pour tout } (x\,,\,t)\in\Omega\times I\,.$$

Alors la fonction F est définie et de classe C^1 sur Ω et on a :

$$F'(x) = \int_I \partial_x f(x\,,\,t)\,dt \qquad \textit{pour tout } x\in\Omega\,.$$

Exercice 6 Soit $h : [0\,,\,1]\to\mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. Pour tout réel $x\geqslant 0$ on pose :

$$F(x) = \int_0^1 \big(h(t)\big)^x\,dt\ .$$

Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 7 Pour tout réel x , on pose :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt\ .$$

a) Montrer que les fonctions F et G sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $F+G^2$ est constante.
b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Exercice 8 La **fonction Gamma** d'Euler est définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,dt\ .$$

a) Montrer que Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) Montrer que pour tout réel $x>0$, on a : $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
c) Montrer que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.