Chapitre 10 : Séries entières

1 Rayon de convergence

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ considérons la fonction $u_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par : $u_n(z) = a_n\, z^n$. La série de fonctions $\sum u_n$ est appelée une *série entière*, dont on étudie tout d'abord le domaine de convergence.

Lemme 1 (Abel) *S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n\, z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors la série numérique $\sum a_n\, z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|\, z\,| < |\, z_0\,|$.*

Définition 1 *Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$ est :*

$$R \;=\; \sup\{\, r \in \mathbb{R}_+ \;/\; \textit{ la suite } (a_n\, r^n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ est bornée } \} \in [\,0\,,\, +\infty\,]\,.$$

Théorème 1 *Si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$, cette série :*
- *converge absolument si $|\,z\,| < R$*
- *diverge grossièrement si $|\,z\,| > R$*
- *si $|\,z\,| = R$, on ne peut pas conclure en général.*

De plus, la série converge normalement sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon $r < R$.

Corollaire 1 *La fonction somme S définie par : $S(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ est continue sur son disque de convergence, qui est le disque* **ouvert** *de centre 0 et de rayon R.*

Attention : en général, la série $\sum a_n\, z^n$ ne converge **pas** normalement sur son disque de convergence, mais uniquement sur tout disque fermé **strictement** inclus dans celui-ci. Le bord du disque de convergence est parfois appelé le *cercle d'incertitude*, car tous les comportements de la série sont possibles sur ce cercle.

Proposition 1 (règle de Cauchy) *Si la suite $(|\,a_n\,|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite $\ell \in [0\,,\,+\infty]$, le rayon de convergence R de $\sum a_n\, z^n$ est donné par : $R = 1/\ell$ si $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $R = +\infty$ si $\ell = 0$ et : $R = 0$ si $\ell = +\infty$.*

Proposition 2 (règle de d'Alembert) *S'il existe un entier n_0 tel que $a_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant n_0$ et si la suite $(|\,a_{n+1}/a_n\,|)_{n\geqslant n_0}$ admet une limite $\ell \in [0\,,\,+\infty]$, le rayon de convergence R de $\sum a_n\, z^n$ est donné par : $R = 1/\ell$ si $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $R = +\infty$ si $\ell = 0$ et : $R = 0$ si $\ell = +\infty$.*

Proposition 3 *Si on a : $b_n = O(a_n)$, le rayon de convergence de $\sum b_n\, z^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum a_n\, z^n$. Si on a : $a_n \sim b_n$, les séries entières $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ ont le même rayon de convergence.*

Attention : ces critères sont des conditions suffisantes, et n'admettent **pas de réciproque**. En général, le rayon de convergence de $\sum a_n\, z^n$ est donné par la *formule de Hadamard* :

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} \left(\, |\,a_n\,|^{\frac{1}{n}} \,\right).$$

mais cette formule est **hors-programme**. En particulier, pour les séries *lacunaires* admettant une infinité de termes nuls, on ne peut pas utiliser directement la règle de d'Alembert, et il faut soit faire un changement de variables pour s'y ramener, soit utiliser le critère de d'Alembert pour les séries numériques, soit revenir à la définition.

Exercice 1 Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n\, z^n$ dans les cas suivants.

a) $a_n = n!$ **b)** $a_n = \dfrac{1}{n!}$ **c)** $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ **d)** $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!\, n^n}$

Exercice 2 Calculer les rayons de convergence des séries entières :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n \quad , \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} z^{2n} \quad , \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} z^{2n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} z^{n^2}\,.$$

Proposition 4 *Si les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont notés respectivement R et R' , leur somme et leur produit de Cauchy ont des rayons de convergence supérieurs ou égaux à $R'' = \min(R, R')$ et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n \qquad \textit{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant : $|\,z\,| < R''$, où : $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Fonction somme d'une série entière

La dérivabilité des fonctions d'une variable complexe (les *fonctions holomorphes*) est hors-programme, et on se restreindra donc aux cas des séries entières (à valeurs réelles ou complexes) d'une **variable réelle**, notée désormais x .

Proposition 5 *Le rayon de convergence de la série dérivée :*

$$\sum_{n\geqslant 1} n\, a_n\, x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)\, a_{n+1}\, x^n$$

est égal à celui de la série $\sum a_n\, x^n$.

Théorème 2 *Si la série entière $\sum a_n\, x^n$ admet un rayon de convergence $R > 0$, sa fonction somme $S\ :]-R\,,\, R[\to \mathbb{C}$ définie par :*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \textit{ pour tout } x \in]-R\,,\, R[$$

est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,,\, R[$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme.

En particulier, si $R > 0$, on a :

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\,,$$

et la série entière $\sum a_n\, x^n$ s'identifie à la série de Taylor de la fonction S, qui détermine donc celle-là. On en déduit le résultat d'unicité suivant, qui est fondamental.

Théorème 3 *Si les séries entières $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ ont des rayons de convergence strictement positifs et s'il existe un réel $r > 0$ tel que :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n \textit{ pour tout réel } x \in]-r\,,\, r\,[\,,$$

alors on a : $a_n = b_n$ pour tout entier naturel n , c'est à dire $\sum a_n X^n = \sum b_n X^n$. En d'autres termes, on peut identifier les fonctions développables en séries entières aux séries formelles dont le rayon de convergence est strictement positif.

3 Fonctions développables en série entière

Définition 2 *Soit I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est développable en série entière au voisinage d'un point $x_0 \in I$ s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et un réel $r > 0$ tel que :*

$$f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, h^n \ \textit{pour tout } h \in]-r, r[\,.$$

Dans ce cas, f est de classe C^∞ au voisinage de x_0 et on a : $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n\,!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Réciproquement, si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et si $f : I \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe C^∞, la série de Taylor de f en un point x_0 donnée par :

$$T_{x_0}(f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n\,!}\,(x - x_0)^n$$

est bien définie, mais elle peut avoir un rayon de convergence nul, et même s'il est non nul, la fonction f n'est pas forcément égale à la somme de sa série de Taylor au voisinage de x_0.

Exercice 3 Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ est de classe C^∞, mais n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 4 Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. On suppose qu'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que : $|\,f^{(n)}(x)\,| \leqslant M^n\, n!$ pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de tout point. *(Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral).*

Les théorèmes 1 et 2 impliquent :

Proposition 6 *Si $f :]-R\,,\,R[\to \mathbb{C}$ admet le développement en série entière donné par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ et si on pose : $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in]-R\,,\,R[$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-R\,,\,R[$, on a :*

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!}\, a_{n+p}\, x^n \qquad \textit{et} \qquad F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\, a_{n-1}\, x^n\,.$$

Proposition 7 **Développements usuels.** *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :*

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, z^n \quad , \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\, z^{2\,n} \quad , \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!}\, z^{2\,n+1}\,,$$

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n)!}\, z^{2\,n} \quad \textit{et :} \quad \sinh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+1)!}\, z^{2\,n+1} \ \textit{avec } R = +\infty\,.$$

Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|\,z\,| < 1$, on a : $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ et : $\dfrac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, z^n$ avec $R = 1$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on a : $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n\,!}\, x^n$ pour tout $x \in]-1\,,\,1[$, avec $R = 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $R = +\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in]-1\,,\,1[$, on a aussi :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n \quad \textit{et :} \quad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+1}\, x^{2\,n+1} \ \textit{avec } R = 1\,.$$

Proposition 8 *Si la fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ n'admet pas 0 pour pôle, la fonction rationnelle F est développable en série entière au voisinage de 0 , le rayon de convergence de la série entière obtenue est égal à la distance à l'origine de l'ensemble des pôles* **complexes** *de F , et F est la fonction somme de cette série entière sur tout son disque de convergence.*

Pour obtenir ce développement, on utilise une décomposition en éléments simples de F .

Exercice 5 **a)** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$: montrer que la fonction $f\ :\ t \mapsto (1+t)^\alpha$ est l'unique solution sur l'intervalle $I =]-1\,,\,1[$ de l'équation différentielle $(\star)$: $(t+1)\,y' = \alpha\,y$ vérifiant : $y(0) = 1$.
b) On suppose que $(\star)$ admet une solution $g\ :]-r\,,\,r[\to \mathbb{R}$ avec $0 < r \leqslant 1$ de la forme :

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}\,t^n \qquad \text{pour tout } t \in]-r\,,\,r[$$

ayant un rayon de convergence supérieur ou égal à r . Montrer qu'on a : $a_{n+1} = (\alpha - n)\,a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire une expression explicite de a_n pour $n \in \mathbb{N}$.
c) Calculer le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue, et en déduire que la fonction g est solution de l'équation $(\star)$ sur I . En conclure que f admet bien le développement en série entière donné par la proposition 7.

4 Exercices

Exercice 6 Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière en 0. Calculer le développement et donner son rayon de convergence.

a) $x \mapsto \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)^2}$ **b)** $x \mapsto e^x \sin x$ **c)** $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\arctan t^2}{t}\,dt$ **d)** $x \mapsto \arcsin x$ **.**

Exercice 7 Après avoir déterminé leur rayon de convergence, calculer la somme des séries entières suivantes sur leur disque de convergence.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \cosh(n)\,x^n$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}\,x^n$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$.

Exercice 8 Montrer que la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sinh(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 Trouver toutes les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle : $-t^2y'' - 2ty' + y = \arctan(t)$.