Universités Paris 6 et Paris 7 | Analyse (UE 3)
M1 MEEF | 2013-2014

Interrogation du 7 novembre 2013

Durée : 1 heure.

Barème indicatif : 4 + 12 + 8

Question de cours

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Exercice 1

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \geqslant b \geqslant 0$.

a) Montrer qu'on peut définir deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

b) Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n .$$

c) Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_{n+1} - b_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n - b_n).$$

d) Démontrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes les deux convergentes et qu'elles ont la même limite.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = x\,\sin(x) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que la suite $\big(f(y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.
b) La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?
c) Soit $c \in \mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ vérifiant : $f(z_n) = c$ à partir d'un certain rang.