Interrogation du 9 Janvier 2014

Correction

Question de cours

Soit x un point de I, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I convergeant vers x. On a, par définition de la dérivabilité

$$\lim_n \frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n} = f'(x).$$

La suite $\left(\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente, et par conséquent bornée (par une constante M). On obtient donc

$$|f(x_n)-f(x)| \leq M|x_n-x| \to 0,$$

de sorte que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant arbitraire, la fonction f est donc continue en x.

Exercice 1

On trouve

$$e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

et

$$\ln(x) = \ln(2) + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} + o\left((x-2)^3\right).$$

Pour le dernier développement, écrire $\ln(x) = \ln(2+(x-2)) = \ln(2) + \ln(1+\frac{x-2}{2})$, et utiliser le développement de $\ln(1+h)$ en $h=0$.

Exercice 2

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, de sorte que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Par ailleurs, on a $|f(x)| \leq |x|^2 \underset{x\to 0}{\to} 0$, de sorte que f tend vers 0 en 0. On peut donc prolonger f en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ f(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Le calcul du taux d'accroissement donne, pour $h \neq 0$,

$$\left|\frac{\tilde{f}(h)-\tilde{f}(0)}{h}\right| = \left|\frac{h^2\sin\left(\frac{1}{h}\right)-0}{h}\right| = \left|h\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right| \leq |h| \underset{h\to 0}{\to} 0,$$

On a donc $\frac{\tilde{f}(h)-\tilde{f}(0)}{h} \underset{h\to 0}{\to} 0$, de sorte que la fonction $\tilde{f}$ est dérivable en 0, avec $f'(0)=0$.

3. La dérivée de $\tilde{f}$ en $x \neq 0$ se calcule explicitement :

$$\tilde{f}'(x) = \underbrace{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{|\cdot|\leq|x|\underset{x\to0}{\to}0} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{pas de limite en } x\to 0},$$

mais on n'a pas $\tilde{f}(x) \underset{x\to 0}{\to} \tilde{f}'(0)$. La fonction $\tilde{f}'$ n'est donc pas continue, et $\tilde{f}$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.