Universités Paris 6 et Paris 7 — Analyse (UE 3)
M1 MEEF — 2013-2014

Interrogation du 13 mars 2014

Durée : 1 heure.

Question de cours

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante et continue par morceaux. Montrer que f est intégrable sur $[\,0\,,\,+\infty[$ si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ est convergente.

Exercice 1

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad f_n(x) = e^{-n\,x^2} \ .$$

a) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa limite.
b) Soit I un intervalle ouvert contenant 0 . Montrer sans faire aucun calcul que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I .
c) Soit a un nombre réel strictement positif. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur l'intervalle $[\,a\,,\,+\infty\,[$.

Exercice 2

Soit T un entier naturel non nul et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle non identiquement nulle et T-périodique, c'est à dire que :

$$a_{n+T} = a_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \ .$$

a) Calculer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\,z^n$. On pose :

$$D = \Big\{ z \in \mathbb{C} \;/\; |\,z\,| < R \Big\} \qquad \text{et} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,z^n \quad \text{pour tout } z \in D \ .$$

b) Montrer que pour tout $z \in D$ et tout entier naturel non nul p , on a :

$$\sum_{n=0}^{p\,T-1} a_n\,z^n = \frac{1 - z^{p\,T}}{1 - z^T} \sum_{k=0}^{T-1} a_k\,z^k \ .$$

En déduire que f est une fonction rationnelle.