Corrigé de l'interrogation du 13 mars 2014

Question de cours (6 points). Comme f est décroissante et continue par morceaux, on a pour tout entier naturel k :

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k)$$

et en sommant ces inégalités pour k allant de 0 à n on obtient pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} f(k+1) \leqslant \int_0^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) = S_n\,.$$

Si la série de terme général $f(n)$ converge, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par un réel M et on obtient pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$\int_0^{x} f(t)\,dt \leqslant \int_0^{E(x)+1} f(t)\,dt \leqslant M$$

où E est la partie entière, ce qui montre que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisqu'elle est à valeurs positives. Réciproquement, si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ on obtient en réindexant :

$$S_{n+1} - f(0) \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

pour tout entier naturel n, donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, donc la série $\sum f(n)$ est convergente puisque ses termes sont positifs : on a donc l'équivalence souhaitée.

Exercice 1 a) (2 points). Pour tout réel $x \neq 0$, la suite $(-n\,x^2)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ donc la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, et si $x = 0$ elle est constante égale à 1. On en conclut que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par : $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 1$.

b) (2 points). Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément sur I, sa limite f serait continue sur I puisque chaque fonction f_n est continue. Mais la fonction f n'est pas continue en $0 \in I$ donc la convergence n'est pas uniforme sur I.

c) (2 points). On a pour tout $x \in [\,a\,,\,+\infty\,[$:

$$|\,f_n(x) - f(x)\,| = e^{-n\,x^2} \leqslant e^{-n\,a^2}$$

par croissance de la fonction exponentielle, et la suite $(e^{-n\,a^2})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 puisque $a > 0$, donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[\,a\,,\,+\infty\,[$.

Exercice 2 a) (4 points). Comme elle est T-périodique, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, donc elle est bornée et le réel :

$$M = \max\Big(\,|\,a_0\,|\,,\,|\,a_1\,|\,,\ldots,\,|\,a_{T-1}\,|\,\Big)$$

en est un majorant. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc : $|\,a_n\,z^n\,| \leqslant M\,|\,z\,|^n$, donc si on a : $|\,z\,| < 1$, la suite $(a_n\,z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc elle est bornée, d'où : $R \geqslant 1$. D'autre part, il existe un entier r tel que $a_r \neq 0$, et pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_{p\,T+r}\; z^{p\,T+r} = a_r\; z^{p\,T+r}\,,$$

donc si on a : $|\,z\,| > 1$, la suite $(a_n\,z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, d'où : $R \leqslant 1$. On a donc : $R = 1$.

b) (4 points). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple $(q\,,\,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que : $n = q\,T+k$ et $k < T$, et on a : $a_{\,q\,T+k} = a_k$, donc on obtient :

$$\sum_{n=0}^{p\,T-1} a_n\, z^n = \sum_{q=0}^{p-1}\Big(\sum_{k=0}^{T-1} a_{q\,T+k}\; z^{q\,T+k}\Big) = \sum_{q=0}^{p-1}\Big(\sum_{k=0}^{T-1} a_{\,k}\; z^k\; z^{q\,T}\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{T-1} a_{\,k}\; z^k\Big)\Big(\sum_{q=0}^{p-1} z^{q\,T}\Big),$$

d'où la formule demandée puisque $z \neq 1$. Comme on a : $|\,z\,| < 1$, on obtient :

$$\lim_{p\to+\infty} z^{p\,T} = 0 \quad , \qquad \text{donc :} \qquad f(z) \;=\; \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{p\,T-1} a_n\, z^n \;=\; \frac{1}{1-z^T}\sum_{k=0}^{T-1} a_{\,k}\; z^k\,,$$

donc f est le quotient de deux polynômes : c'est donc une fonction rationnelle.