Université Pierre et Marie Curie - Université Paris Diderot
Master EF 1ère année - CAPES
2013 - 2014

Fondements de l'analyse

Raphaël Roux *, David Hermann **

*. raphael.roux@upmc.fr
**. hermann@math.jussieu.fr

Table des matières

Chapitre 1

Nombres réels

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est le cadre naturel de l'analyse. Dans ce chapitre, nous allons construire cet ensemble en partant de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels dont nous poserons l'existence comme axiome.

À partir de $\mathbb{N}$, nous pourrons construire l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs et l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est le plus petit corps qui contienne $\mathbb{N}$, c'est à dire l'ensemble le plus simple dans lequel on puisse définir une addition, une soustraction, une multiplication et une division en se basant sur les nombres entiers.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est également muni d'une structure d'ordre. Toutefois, il manque à $\mathbb{Q}$ une certaine propriété relative à cette structure d'ordre, la *complétude*, ce qui fait que certains nombres qui "devraient" exister ne sont pas dans $\mathbb{Q}$. L'ensemble $\mathbb{R}$ est construit à partir de $\mathbb{Q}$ en rajoutant ces éléments. On obtient alors un corps, contenant strictement $\mathbb{Q}$, mais qui vérifie maintenant la propriété de complétude.

1.1 L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels

1.1.1 Les axiomes de Peano

L'ensemble $\mathbb{N}$ est défini de manière axiomatique : on considère certaines propriétés de $\mathbb{N}$ comme "évidentes", et on les suppose vraies. Le but va être de construire successivement $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, à partir de ces quelques axiomes.

Définition 1.1.1. *On suppose qu'il existe un ensemble* $\mathbb{N}$*, un élément* $0 \in \mathbb{N}$ *et une fonction injective* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$*, appelée fonction* successeur *satisfaisant la propriété suivante, appelée* propriété de récurrence *:*

Si un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ *contient* 0 *et est stable par* s*, alors il s'agit de* $\mathbb{N}$ *tout entier.*

Dans cette définition, "A est stable par s" signifie que si n est dans A, alors $s(n)$ est également dans A. Le caractère injectif de s entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ signifie que tout élément de $\mathbb{N}$ a un successeur, que 0 n'est successeur d'aucun élément, et que deux éléments ayant le même successeur sont égaux.

Ces suppositions sont appelées *axiomes de Peano*. Un élément de $\mathbb{N}$ est appelé *entier*, ou *entier naturel*.

Un première conséquence de cette définition est que l'on peut énumérer des éléments tous distincts de $\mathbb{N}$ en considérant 0, $s(0)$, $s(s(0))$, $s(s(s(0)))$, etc. L'axiome de récurrence dit que l'on obtient ainsi *tous* les entiers.

On *note* $s(0) = 1$, $s(1) = 2$, $s(2) = 3$, etc. L'élément $s(n)$ aura vocation à représenter $n + 1$.

Propriété 1.1.2. *s est en fait une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.*

Démonstration. On sait déjà que s est une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Il reste à montrer qu'elle est surjective.

Pour cela, il suffit de remarquer que l'ensemble $\{0\} \cup s(\mathbb{N})$ contient 0 et le successeur de chacun de ses éléments (puisqu'il contient les successeurs de tous les entiers). L'axiome de récurrence montre donc $\{0\} \cup s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. □

L'axiome de récurrence est très utile pour montrer des propriétés sur l'ensemble $\mathbb{N}$ en l'utilisant de la manière suivante. On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ dont on veut prouver qu'elle est vérifiée par tout entier naturel n. On considère alors l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\}.$$

Notre objectif est de montrer que $A = \mathbb{N}$. On prouve alors les deux propositions $\mathcal{P}(0)$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(s(n)). \tag{1.1}$$

Comme $\mathcal{P}(0)$ est vraie, on a $0 \in A$, et comme (1.1) est vraie, l'ensemble A est stable par s. L'axiome de récurrence permet de conclure que $A = \mathbb{N}$. Une démonstration suivant ce schéma est appelée *démonstration par récurrence.*

L'axiome de récurrence permet de définir des fonctions φ sur $\mathbb{N}$ à partir de relations de la forme

$$\varphi(s(n)) = f(\varphi(n)).$$

Propriété 1.1.3. *Soit E un ensemble, α un élément de E et f une fonction de E dans E. Il existe une unique fonction φ de $\mathbb{N}$ dans E telle que :*

$$\varphi(0) = \alpha,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(s(n)) = f(\varphi(n)). \tag{1.2}$$

Quand on aura défini l'addition, l'égalité (1.2) prendra la forme plus habituelle (1.6)

Démonstration.
- Pour l'unicité, on considère deux éventuelles fonctions φ et ψ vérifiant les conditions de l'énoncé. Il suffir de montrer que l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) = \psi(n)\}$$

est égal à $\mathbb{N}$ tout entier. On va procéder par récurrence : on a $\varphi(0) = \alpha = \psi(0)$, donc $0 \in A$. De plus, si $n \in A$, on a

$$\varphi(s(n)) = f(\varphi(n)) = f(\psi(n)) = \psi(s(n)).$$

On a donc $s(n) \in A$. L'ensemble A est donc stable par s, et donc $A = \mathbb{N}$.

– Passons maintenant à l'existence. On va construire le graphe d'une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. C'est à dire qu'on va construire un sous-ensemble $\mathcal{G}$ de $\mathbb{N} \times E$ vérifiant la propriété (note 1)

$$\forall n \in N,\ \exists! x \in E,\ (n, x) \in \mathcal{G}, \tag{1.3}$$

c'est à dire que $\mathcal{G}$ est le graphe d'une fonction. L'unique élément x de E tel que $(n, x) \in \mathcal{G}$ est à comprendre comme $\varphi(n)$. On voudra aussi que $\mathcal{G}$ vérifie

$$(0, \alpha) \in \mathcal{G} \tag{1.4}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n, x) \in \mathcal{G} \Rightarrow (s(n), f(x)) \in \mathcal{G}, \tag{1.5}$$

ce qui signifie que la fonction dont $\mathcal{G}$ est le graphe vérifie bien les conditions de l'énoncé. On considère l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{A \subset \mathbb{N} \times E,\ (0, \alpha) \in A \text{ et } ((n, x) \in A) \Rightarrow (s(n), f(x)) \in A\},$$

c'est-à-dire l'ensembles des sous-ensembles de $\mathbb{N} \times E$ vérifiant (1.4) et (1.5). On va montrer que l'ensemble

$$\mathcal{G} = \bigcap_{A \in \mathcal{E}} A$$

vérifie aussi les conditions (1.4) et (1.5), mais également la condition (1.3), ce qui concluera la preuve.

1. Tout d'abord, chacun des éléments A de $\mathcal{E}$ contient $(0, \alpha)$. Donc, $(0, \alpha) \in \bigcap_{A \in \mathcal{E}} A = \mathcal{G}$ et $\mathcal{G}$ vérifie (1.4).
2. Ensuite, si (n, x) est dans $\mathcal{G}$, alors pour tout A de $\mathcal{E}$, (n, x) est dans A. Par définition de l'ensemble $\mathcal{E}$, on a donc $(s(n), f(x)) \in A$ pour tout A de $\mathcal{E}$. En conséquence, $(s(n), f(x)) \in \bigcap_{A \in \mathcal{E}} A = \mathcal{G}$. Donc $\mathcal{G}$ vérifie bien (1.5).
3. Pour montrer que $\mathcal{G}$ vérifie (1.3), on prouve par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante :

$$\mathcal{P}(n)\ :\ \text{“}\exists! x \in E,\ (n, x) \in \mathcal{G}\text{”}.$$

L'ensemble $\mathcal{G}$ contient nécessairement l'élément $(0, \alpha)$. Ensuite, pour un x de E avec $x \neq \alpha$, et pour un ensemble $A \in \mathcal{E}$, l'ensemble $A \setminus \{(0, x)\}$ est également élément de $\mathcal{E}$, de sorte que $(0, x) \notin \bigcap_{A \in \mathcal{E}} A = \mathcal{G}$. La propriété $\mathcal{P}(0)$ est donc vérifiée.

Supposons maintenant la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Il existe donc un unique x tel que $(n, x) \in \mathcal{G}$. Par (1.5), on a $(s(n), f(x)) \in \mathcal{G}$. De plus, pour $y \in E$ avec $y \neq f(x)$, si $A \in \mathcal{E}$, alors $A \setminus \{(s(n), y)\}$ est également dans $\mathcal{E}$, puisque $(s(n), y)$ n'est pas de la forme $(s(n), f(z))$, où (n, z) est un élément de $\mathcal{G}$. Par conséquent, $(s(n), y) \notin \bigcap_{A \in \mathcal{E}} A = \mathcal{G}$, ce qui montre $\mathcal{P}(s(n))$ et achève donc la démonstration de l'existence de φ.

□

(note 1). On rappelle que $\exists! x$ signifie “il existe un unique x tel que...”

1.1.2 Addition et multiplication

On peut définir par récurrence une addition sur $\mathbb{N}$:

Définition 1.1.4. *Soit m un élément de $\mathbb{N}$. On définit l'addition par les relations :*

$$m + 0 = m \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N},\ m + s(n) = s(m + n).$$

On peut également définir la multiplication de la manière suivante.

Définition 1.1.5. *Soit m un élément de $\mathbb{N}$. On pose $m \times 0 = 0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$,*

$$m \times s(n) = m \times n + m.$$

L'addition et la multiplication vérifient les propriétés classiques suivantes :

Propriété 1.1.6. *L'addition et la multiplication sont associatives et commutatives. L'addition et la multiplication admettent respectivement 0 et 1 comme élément neutre. La multiplication est distributive par rapport à l'addition. Pour tous entiers n, m et p, si $n + m = n + p$, alors $m = p$. De même, si $nm = np$ pour $n \neq 0$, alors $m = p$.*

Démonstration. Toutes les preuves se font par des récurrences bien choisies. On ne rédigera que la preuve de la commutativité, les autres preuves étant laissées en exercice.

Considérons la proposition $\mathcal{P}(n)$ définie par :

$$\mathcal{P}(n) \ : \ \text{“}\forall m \in \mathbb{N},\ n + m = m + n\text{”}.$$

On va montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout n.

- Nous allons faire une deuxième récurrence pour montrer $\mathcal{P}(0)$. Nous considérons la proposition $\mathcal{Q}(m)$ définie par :

  $$\mathcal{Q}(m) \ : \ \text{“}0 + m = m + 0 = m\text{”}.$$

  La proposition $\mathcal{Q}(0)$ est vraie par définition de l'addition. Supposons maintenant que $\mathcal{Q}(m)$ soit vraie pour un certain m. On a alors

  $$0 + s(m) = s(0 + m) = s(m),$$

  par définition de l'addition et l'hypothèse de récurrence. De plus, on a toujours, $s(m) + 0 = s(m)$. La propriété $\mathcal{Q}(s(m))$ est donc vraie, et on a montré par récurrence la propriété $\mathcal{P}(0)$.
- Passons maintenant à l'itération de la récurrence. Pour cela, on va démontrer le résultat suivant :

  Lemme 1.1.7. *Pour tous entiers n et m, on a $s(m) + n = m + s(n)$.*

  Démonstration. Encore une récurrence. On considère la propriété

  $$\mathcal{R}(n) \ : \ \text{“}\forall m \in \mathbb{N},\ s(m) + n = m + s(n)\text{”}.$$

  Soit m un entier, on a $s(m) + 0 = s(m) = s(m + 0) = m + s(0)$ (par la définition de $+$), donc $\mathcal{R}(0)$ est vraie. Si on suppose $\mathcal{R}(n)$ vraie pour un certain entier n, alors en utilisant successivement la définition de $+$, l'hypothèse de récurrence et encore la définition de $+$, on a

  $$s(m) + s(n) = s(s(m) + n) = s(m + s(n)) = m + s(s(n)),$$

  ce qui montre $\mathcal{R}(s(n))$. Finalement, $\mathcal{R}(n)$ est vrai pour tout n, et le lemme 1.1.7 est démontré. □

Revenons à la preuve de $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(s(n))$. Soit n un entier naturel, et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Considérons un entier m. On a, en utilisant tour à tour le lemme 1.1.7, la définition de $+$, l'hypothèse de récurrence et la définition de $+$:

$$s(n) + m = n + s(m) = s(n + m) = s(m + n) = m + s(n).$$

Cela montre $\mathcal{P}(s(n))$, et la preuve est achevée.

□

La propriété 1.1.3 prend une apparence plus habituelle en replaçant $s(n)$ par $n + 1$ et en notant les fonctions de $\mathbb{N}$ dans E sous forme de suites :

Propriété 1.1.8. *Soit E un ensemble, α un élément de E et f une fonction de E dans E. Il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de E telle que :*

$$u_0 = \alpha, \quad \textit{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \tag{1.6}$$

De même, on peut construire des suites par des relations de récurrence double : si α et β sont deux éléments de E et f est une application de $E \times E$ dans E, alors il existe une unique suite d'éléments de E vérifiant

$$u_0 = \alpha,\ u_1 = \beta,\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ u_n + 2 = f(u_n, u_{n+1}).$$

En effet, pour construire cette suite, il suffit d'appliquer la propriété 1.1.8 à la fonction F de $E \times E$ dans lui-même définie par $F(x, y) = (y, f(x, y))$ et à $(\alpha, \beta) \in E \times E$.

La définition 1.1.1 revient à supposer l'existence d'un ensemble $\mathbb{N}$ possédant certaines propriétés. On peut montrer que si un autre ensemble possède les mêmes propriétés, il est isomorphe à $\mathbb{N}$ en un certain sens. Cela signifie que l'ensemble $\mathbb{N}$ est défini sans ambiguïtés par les axiomes de Peano.

Propriété 1.1.9. *Si deux triplets $(\mathbb{N}, 0, s)$ et $(\tilde{\mathbb{N}}, \tilde{0}, \tilde{s})$ vérifient les axiomes de Peano, alors il existe une unique bijection $f : \mathbb{N} \to \tilde{\mathbb{N}}$ telle que $f(0) = \tilde{0}$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $f(s(n)) = \tilde{s}(f(n))$.*

Démonstration. La propriété 1.1.3 donne directement l'existence et l'unicité de f (avec $E = \tilde{\mathbb{N}}$, $\alpha = \tilde{0}$ et $f = \tilde{s}$). □

1.1.3 Bon ordre sur $\mathbb{N}$

Dans la partie 1.1.2, on a muni $\mathbb{N}$ d'une multiplication et d'une addition. Une autre structure importante dont dispose $\mathbb{N}$ est une structure d'ordre. On rappelle quelques définitions :

Définition 1.1.10. *Un* ensemble (totalement) ordonné *est un ensemble E muni d'une relation (c'est à dire d'une application de $E \times E$ dans $\{\boldsymbol{vrai}, \boldsymbol{faux}\}$), notée $\leq$ vérifiant les propriétés*
- *pour tout x, on a $x \leq x$;*
- *pour tous x et y, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$;*
- *pour tous x, y et z, si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$;*
- *pour tous x et y, on a soit $x \leq y$, soit $y \leq x$ (c'est la propriété d'ordre* total*).*

Définition 1.1.11. *Soit E un ensemble totalement ordonné, et soit A un sous-ensemble de E.*
- *un* majorant *(resp. un* minorant*) de A est un élément m de E tel que pour tout a de A, on ait $a \leq m$ (resp. $m \leq a$) ;*

– *Un* plus grand élément *(resp.* un plus petit élément*) est un majorant (resp. un minorant) de A qui appartient à A ;*
– *une* borne supérieure *(resp. une* borne inférieure*) de A est un plus petit élément de l'ensemble des majorants de A (resp. un plus grand élément de l'ensemble des minorants de A).*

Propriété 1.1.12. *Dans un ensemble ordonné E, si un sous-ensemble A de E admet un plus petit élément, celui-ci est unique. On le note alors* $\min A$. *Par ailleurs, la borne supérieure étant définie comme le plus petit élément d'un certain ensemble, celle-ci est également unique (si elle existe). On la note* $\sup A$.

Démonstration. Supposons qu'un ensemble A admette deux plus petits éléments x et y. Comme x est un plus petit élément de A et que $y \in A$, on a $x \leq y$. De même, $y \leq x$. On en conclut donc que $x = y$. □

La propriété suivante montre que bien qu'il soit possible que la borne supérieure d'un ensemble A ne soit pas dans A, il existe des éléments de A qui s'en approchent autant que l'on souhaite.

Propriété 1.1.13. *Soit E un ensemble ordonné et A un ensemble admettant une borne supérieure. Pour tout x de E avec $x < \sup A$, il existe y dans A tel que $x < y \leq \sup A$.*

Démonstration. Soit x un élément de E vérifiant $x < \sup A$. Comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, x n'est pas un majorant de A. Il existe donc $y \in A$ tel que $x < y$. De plus, comme $\sup A$ est un majorant de A, on a $y \leq \sup A$. □

On définit une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ de la façon suivante :

Définition 1.1.14. *Étant donnés deux éléments n et m de $\mathbb{N}$, on dit que n est* inférieur ou égal *à m et on note $n \leq m$ si il existe un entier k tel que $n + k = m$.*

Propriété 1.1.15. *La relation $\leq$ est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{N}$.*

Démonstration. Les quatre propriétés définissant une relation d'ordre total sont montrées respectivement en utilisant :
– l'égalité $n + 0 = n$;
– la propriété 1.1.6 ;
– l'associativité de $+$;
– une récurrence sur m pour montrer que $\{m \in \mathbb{N},\ n \leq m \text{ ou } m \leq n\} = \mathbb{N}$.

□

La relation d'ordre a un bon comportement vis à vis de l'addition et de la multiplication :

Propriété 1.1.16. *Pour tous entiers naturels n, m et k, tels que $n \leq m$ on a*

$$n + k \leq m + k \quad \text{et} \quad nk \leq mk.$$

Démonstration. Par définition, si $n \leq m$, il existe q tel que $n + q = m$. On a donc $n + k + q = m + k$, donc $n + k \leq m + k$. De plus $mk = (n + q)k = nk + qk$, donc $nk \leq mk$. □

Propriété 1.1.17. *Tout sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément*(note 2).

(note 2). On dit aussi que $\mathbb{N}$ est *bien ordonné*.

Démonstration. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{N}$, et supposons que A n'admette pas de plus petit élément. On va montrer que A est l'ensemble vide. Pour cela on va montrer par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie par

$$\mathcal{P}(n) = \text{“}\{0,\dots,n\} \cap A = \emptyset\text{”},$$

est vraie pour tout n entier (note 3). Tout d'abord, on remarque que $0 \notin A$, sinon il serait son plus petit élément, ce qui montre $\mathcal{P}(0)$. Soit n un entier, et supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai. Si $n+1$ était élément de A, par l'hypothèse de récurrence il serait son plus petit élément. Par conséquent, on a $n+1 \notin A$, ce qui montre $\mathcal{P}(n+1)$. On en déduit donc que

$$A = A \cap \mathbb{N} = A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{0,\dots,n\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap \{0,\dots,n\}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \emptyset = \emptyset.$$

L'égalité $\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{0,\dots,n\}$ découle du fait que pour tout entier n, on a $n \in \{0,\dots,n\}$ □

Propriété 1.1.18. *$\mathbb{N}$ n'admet pas de plus grand élément. En revanche, toute partie non-vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.*

Démonstration.
- Supposons que $\mathbb{N}$ admette un plus grand élément M. On aurait alors $M+1 \leq M$, ce qui est contradictoire.
- On va montrer par récurrence la propriété suivante, qui concluera la preuve :

$$\mathcal{P}(n) = \text{“Tout sous-ensemble non-vide de } \mathbb{N} \text{ majoré par } n \text{ admet un plus grand élément.”}$$

  Cette propriété est bien vraie au rang 0. En effet, le seul ensemble non-vide majoré par 0 est $\{0\}$ qui admet 0 comme plus grand élément.
  Considérons $n \in \mathbb{N}$, et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}$ majoré par $n+1$. On a deux cas possibles : soit $n+1 \in A$, auquel cas $n+1$ est le plus grand élément de A ; soit $n+1 \notin A$, auquel cas A est majoré par n et on applique $\mathcal{P}(n)$. Dans les deux cas $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

□

On a présenté ici une construction de $\mathbb{N}$ basée sur le principe de récurrence. On aurait aussi pu *poser comme axiome* les propriétés 1.1.17 et 1.1.18, et *retouver* les axiomes de Peano (qui seraient cette fois-ci des théorèmes) à partir de ces deux axiomes. En effet, si on part des propriétés 1.1.17 et 1.1.18, on peut définir 0 comme étant le plus petit élément de $\mathbb{N}$, et on définit $s(n)$ par

$$s(n) = \min\{k \in \mathbb{N},\ k > n\}.$$

Cette expression a bien un sens : en effet, comme $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément, le membre de droite est non-vide, et admet donc un plus petit élément. On peut alors vérifier que s est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ (il suffit de montrer que sa réciproque est $s^{-1}(n) = \max\{k \in \mathbb{N},\ k < n\}$), et que $(\mathbb{N}, 0, s)$ vérifie l'axiome de récurrence (pour un ensemble A contenant 0 et stable par s, considérer le plus petit élément de $\mathbb{N} \setminus A$; on arrive à une contradiction, ce qui montre que $A = \mathbb{N}$).

1.1.4 Quelques autres types de récurrence

En plus du raisonnement par récurrence simple présenté dans la partie 1.1.1, il existe d'autres types de récurrence.

(note 3). Bien entendu, $\{0,\dots,n\}$ désigne l'ensemble $\{k \in \mathbb{N},\ k \leq n\}$.

La récurrence double (triple, etc)

Pour montrer une proposition $\mathcal{P}(n)$ pour tout entier n, on peut également montrer les propositions suivantes :
- $\mathcal{P}(0)$;
- $\mathcal{P}(1)$;
- $\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{P}(n)\ \texttt{et}\ \mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$.

En effet, une récurrence simple permet alors de montrer la proposition

$$\mathcal{Q}(n) = \text{“}\mathcal{P}(n)\ \texttt{et}\ \mathcal{P}(n+1)\text{”}$$

pour tout entier n.

On peut également parler de récurrence triple, quadruple, etc. À ce moment-là il faut initialiser la récurrence par $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ et montrer “$\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{P}(n)\ \texttt{et}\ \mathcal{P}(n+1)\ \texttt{et}\ \mathcal{P}(n+2)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+3)$” (pour une récurrence triple).

La récurrence forte

Pour montrer une proposition $\mathcal{P}(n)$ pour tout entier n, on peut également montrer les deux propositions suivantes :
- $\mathcal{P}(0)$;
- $\forall n \in \mathbb{N},\ (\forall k \in \{0, \ldots, n\},\ \mathcal{P}(k)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

En effet, par une récurrence simple, les hypothèses précedentes permettent alors de montrer la proposition

$$\mathcal{R}(n) = \text{“}\forall k \in \{0, \ldots, n\},\ \mathcal{P}(k)\text{”}$$

pour tout entier n.

1.2 L'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs

On ne peut pas définir une soustraction pour tout couple d'éléments de $\mathbb{N}$, mais on a tout de même la propriété suivante :

Propriété 1.2.1. *Si $n \leq m$ il existe un unique entier k tel que $n+k = m$. On le note $k = m - n$.*

Démonstration. L'existence vient de la définition de la relation d'ordre. Pour l'unicité on suppose $n+k = m = n+q$. La propriété 1.1.6 permet de conclure $k = q$. □

On va alors construire l'ensemble des entiers relatifs en rajoutant “à la main” les éléments $n - m$ pour $n < m$.

Définition 1.2.2. *On pose*(note 4) $\mathbb{Z} = \{0\} \cup (\{+, -\} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}))$. *Les éléments de la forme $(+, n)$ et $(-, n)$ seront respectivement notés n et $-n$.*

On définit alors l'addition et la multiplication sur $\mathbb{Z}$ à partir de l'addition et la multiplication sur $\mathbb{N}$ en utilisant les règles habituelles pour les signes.

Propriété 1.2.3. *Muni de $+$ et $\times$, $\mathbb{Z}$ est un anneau commutatif.*

(note 4). La notation $\mathbb{Z}$ vient du mot allemand “Zahl”, qui signifie “nombre”.

Démonstration. Laissé en exercice. $\square$

La structure d'anneau est la structure naturelle pour effectuer des additions, soustractions, multiplications. Ceci est formalisé dans la définition suivante :

Définition 1.2.4. *Un* anneau *A est un ensemble muni de deux loi de composition internes (c'est-à-dire deux fonctions de $A \times A$ dans A), notées $+$ et $\times$, vérifiant les propriétés "naturelles" suivantes.*
- *l'addition est commutative, associative, possède un élément neutre 0_A et tout élément admet un opposé ;*
- *la multiplication est commutative, associative et possède un élément neutre 1_A ;*
- *la multiplication est distributive par rapport à l'addition.*

Un autre définition de $\mathbb{Z}$, plus artificielle, mais facilitant les preuves des propriétés classiques de l'addition et de la multiplication se fait en utilisant un quotient de $\mathbb{N}$.

Définition 1.2.5. *On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par $(n, m) \sim (n', m')$ si $n + m' = n' + m$. On appelle $\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalences de $\sim$.*

On définit la somme de deux éléments de $\mathbb{Z}$ par $(n, m) + (n', m') = (n + n', m + m')$. De même on définit la multiplication par la formule

$$(n, m) \times (n', m') = (nn' + mm', nm' + mn').$$

Cette définition se comprend si l'on voit $\mathbb{Z}$ comme l'ensemble des différences entre deux éléments de $\mathbb{N}$: la classe d'équivalence de (n, m) est à comprendre comme $n - m$.

1.3 Le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels

Un corps est un cas particulier d'anneau dans lequel on peut effectuer des divisions. Plus précisément, on définit :

Définition 1.3.1. *Un* corps *est un anneau dans lequel tout élément est inversible (pour la multiplication).*

Définition 1.3.2. *On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ par $(n, m) \sim (n', m')$ si $nm' = n'm$. On appelle*(note 5) *$\mathbb{Q}$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$. La classe de (n, m) est notée $\frac{n}{m}$. Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont appelés* nombres rationnels.

Définition 1.3.3. *On définit une addition et une multiplication sur $\mathbb{Q}$ par les formules*

$$\frac{n}{m} + \frac{n'}{m'} = \frac{nm' + n'm}{mm'} \qquad \text{et} \qquad \frac{n}{m} \times \frac{n'}{m'} = \frac{nn'}{mm'}.$$

On définit aussi une relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$ par

$$\frac{n}{m} \leq \frac{n'}{m'} \Leftrightarrow nm' \leq n'm \quad \text{si } m > 0 \text{ et } m' > 0.$$

(note 5). La notation $\mathbb{Q}$ vient du mot "quotient".

La condition $m > 0$ dans la définition de l'ordre n'est pas restrictive puisque tout rationnel à une représentation dont le dénominateur est positif (puisque $\frac{n}{m} = \frac{-n}{-m}$).

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est donc muni de deux structures : d'une part d'une structure d'anneau, avec les lois $+$ et $\times$, d'autre part, d'une structure d'ordre. Dans le cas de $\mathbb{Q}$ ces deux structures sont compatibles au sens suivant.

Définition 1.3.4. *Un corps $\mathbb{K}$ est dit ordonné si il est muni d'une relation d'ordre $\leq$ compatible avec la structure de corps, au sens où :*
- *si x, y et z sont trois éléments de $\mathbb{K}$ avec $x \leq y$, alors $x + z \leq y + z$;*
- *si x, y et z sont trois éléments de $\mathbb{K}$ avec $0 < z$ et $x < y$ alors, $zx < zy$.*

Propriété 1.3.5. *Muni de $+$, $\times$ et $\leq$, $\mathbb{Q}$ est un corps ordonné.*

Démonstration. Laissé en exercice. □

Propriété 1.3.6. *Tout corps ordonné contient un unique sous-corps isomorphe à $\mathbb{Q}$. L'isomorphisme en question est unique.*

Avant de prouver la propriété 1.3.6, on va montrer un lemme.

Lemme 1.3.7. *Dans un corps ordonné $\mathbb{K}$, on a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0_{\mathbb{K}} < n1_{\mathbb{K}}$.*

Démonstration. On procède par récurrence. Tout d'abord, on montre par l'absurde que $0_{\mathbb{K}} < 1_{\mathbb{K}}$. En effet, si $1_{\mathbb{K}} < 0_{\mathbb{K}}$, la multiplication par $1_{\mathbb{K}}$ changerait le signe de l'égalité, et on aurait $1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$, ce qui est contradictoire. On a donc montré la propriété au rang 0. Supposons vraie l'inégalité au rang n : $0_{\mathbb{K}} < n1_{\mathbb{K}}$. Alors, en ajoutant $1_{\mathbb{K}}$ on obtient $1_{\mathbb{K}} < (n+1)1_{\mathbb{K}}$, or $0_{\mathbb{K}} < 1_{\mathbb{K}}$, d'où $0_{\mathbb{K}} < (n+1)1_{\mathbb{K}}$. □

Démonstration de la propriété 1.3.6. Le lemme 1.3.7 montre que dans un corps ordonné, le seul entier relatif nul est 0. On peut donc diviser par tout entiert $n \neq 0$. L'ensemble $\left\{\frac{n1_{\mathbb{K}}}{m1_K},\ (n,m) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})\right\}$ est donc un sous-corps de $\mathbb{K}$ isomorphe à $\mathbb{Q}$. L'unicité du morphisme vient du fait que l'image du rationnel $\frac{n}{m}$ ne peut être que $\frac{n1_{\mathbb{K}}}{m1_{\mathbb{K}}}$. □

On fini ce paragraphe par remarquer qu'il y a "autant" de rationnels que d'entiers.

Propriété 1.3.8. *$\mathbb{Q}$ est dénombrable, c'est à dire qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$.*

Démonstration. On va faire cette preuve en admettant le résultat intuitif suivant, mais dont la preuve n'est pas si facile, appelé *théorème de Cantor-Bernstein* :

Théorème 1.3.9. *Étant donnés deux ensembles E et F, si il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection de E dans F.*

Il nous suffit donc d'exhiber une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$. On définit par exemple l'injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par $\frac{n}{m} \mapsto 2^m(2n+1)$, où la fraction $\frac{n}{m}$ aura été choisie telle que m soit positif et le plus petit possible. Ensuite, on exhibe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ par exemple, l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$f : \begin{cases} 2n+1 & \mapsto n \\ 2n & \mapsto -n \end{cases}$$

convient. □

1.4 Le corps $\mathbb{R}$ des réels

1.4.1 Définition axiomatique de $\mathbb{R}$

Nous commençons par une définition axiomatique de $\mathbb{R}$.

Définition 1.4.1. *Un corps ordonné $\mathbb{K}$ est dit* Archimédien *si quels que soient deux éléments x et y de $\mathbb{K}$ avec $0 < x$ et $0 < y$, il existe un entier positifi n tel que $x < ny$.*

Un corps ordonné $\mathbb{K}$ vérifie la propriété de la borne supérieure *si tout sous-ensemble non-vide majoré admet une borne supérieure. On dit aussi que $\mathbb{K}$ est* complet.

Théorème 1.4.2. *Il existe un unique corps ordonné Archimédien vérifiant la propriété de la borne supérieure, à unique isomorphisme près. On le note $\mathbb{R}$. Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés "nombres réels".*

Dans le théorème 1.4.2 on entend par "isomorphisme" un isomorphisme de corps croissant.

La propriété importante pour nous ici est la propriété de la borne supérieure. On remarquera que $\mathbb{Q}$ est un corps ordonné Archimédien, qui ne vérifie pas cette propriété (note 6).

Nous allons montrer le théorème 1.4.2 dans les deux parties suivantes : nous allons montrer qu'il existe un corps ordonné Archimédien et complet dans la partie 1.4.2, puis que deux tels corps sont isomorphes dans la partie 1.4.3.

1.4.2 Une construction de $\mathbb{R}$

L'idée de cette construction est que l'ensemble $\{q \in \mathbb{Q},\ q < \alpha\}$ caractérise entièrement le réel α. Comme pour l'instant on n'a défini que l'ensemble $\mathbb{Q}$, on va chercher à caractériser les ensembles de cette forme sans faire mention des réels. C'est ce qui est fait dans la définition suivante.

Définition 1.4.3. *On dit qu'un ensemble $A \subset \mathbb{Q}$ est une* coupure (note 7) *de $\mathbb{Q}$ si :*
- *il est différent de $\mathbb{Q}$ et $\emptyset$;*
- *pour tout élément q de A, on a $\{r \in \mathbb{Q},\ r \leq q\} \subset A$;*
- *pour tout q de A, il existe $r > q$ avec $r \in A$.*

L'existence d'un élément $r > q$ dans A permet d'éviter que les deux ensembles $\{q \in \mathbb{Q},\ q \leq q_0\}$ et $A_{q_0} = \{q \in \mathbb{Q},\ q < q_0\}$ ne soient tous les deux des coupures.

Définition 1.4.4. *On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des coupures de $\mathbb{Q}$.*

On notera que $\mathbb{Q}$ peut être vu comme un sous-ensemble de $\mathcal{R}$ par l'identification $q \simeq \{r \in \mathbb{Q},\ r < q\}$. Toutefois, certaines coupures ne s'identifient à aucun rationnel, comme par exemple $\{q \in \mathbb{Q},\ q \leq 0 \text{ ou } q^2 \leq 2\}$, qui correspondra au réel $\sqrt{2}$.

Quand on aura défini les réels, on verra que les coupures sont exactement les ensembles de la forme $\{q \in \mathbb{Q},\ q < \alpha\}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nous allons définir sur $\mathcal{R}$ une structure de corps ordonné, puis nous montrerons que ce corps est Archimédien et complet.

(note 6). Par contre, un corps ordonné vérifiant la propriété de la borne supérieure est nécessairement Archimédien. En effet, dans un corps ordonné non-Archimédien l'ensemble $\mathbb{N}$ est majoré (il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $n\alpha < \beta$ pour tout n, donc $n \leq \frac{\beta}{\alpha}$). Si ω est un majorant de $\mathbb{N}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n+1 \leq \omega$, d'où $n \leq \omega - 1$. Par conséquent, $\omega - 1$ est un majorant de $\mathbb{N}$, et $\mathbb{N}$ n'a donc pas de plus petit majorant, c'est-à-dire pas de borne supérieure.

(note 7). On dit aussi *coupure de Dedekind*.

Définition 1.4.5. – *L'ensemble $\mathcal{R}$ est muni de la relation d'ordre $\subset$.*
– *$\mathcal{R}$ est muni de la loi de composition interne $+$ définie par*

$$A + B = \{q \in \mathbb{Q},\ \exists a \in A,\ \exists b \in B,\ q = a + b\} = \bigcup_{b \in B} A + b.$$

Propriété 1.4.6. *L'ensemble $\mathcal{R}$ muni de $+$ est un groupe commutatif dont l'élément neutre est $\mathcal{O} = \{q \in \mathbb{Q},\ q < 0\}$ et l'opposé d'un élément A de $\mathcal{R}$ est donné par*

$$-A = \{q \in \mathbb{Q},\ \exists r \in \mathbb{Q} \setminus A,\ q < -r\}$$

Démonstration. La loi $+$ est clairement commutative et associative. On montrer que $\mathcal{O}$ est son élément neutre.

– Soit A une coupure. On a
$$A + \mathcal{O} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q},\ q<0} A + q.$$
Or, pour $q < 0$ rationnel, on a $A + q \subset A$, donc $A + \mathcal{O} \subset A$. De plus, si $q \in A$, il existe $r \in A$ avec $q < r$. On a alors
$$q = r + (q - r) \in A + (q - r) \subset A + \mathcal{O},$$
d'où $A \subset A + \mathcal{O}$.
– Soit $q \in -A$. Il existe $r \notin A$ avec $q < -r$. Par conséquent, $A + q \subset A - r$. Or, $r \notin A$, de sorte que $A - r \subset \mathcal{O}$, ce qui montre que $A + (-A) \subset \mathcal{O}$. De même, soit $q < 0$. On va montrer que $q \in A + (-A)$. Soit $r \in A$ tel que et $r - \frac{q}{2} \notin A$. Un tel rationnel existe : si ce n'était pas le cas, pour tout $r < q$, l'ensemble $\{r - n\frac{q}{2},\ n \in \mathbb{N}\}$ serait inclus dans A, et on aurait $A = \mathbb{Q}$. Le rationnel $-(r - q)$ est alors dans $-A$ (puisque $r - q < r - \frac{q}{2} \notin A$), ce qui montre que $q = r + (q - r)$ est dans $A + (-A)$. On a donc $\mathcal{O} \subset A + (-A)$.

□

On peut également définir une multiplication sur $\mathcal{R}$:

Définition 1.4.7. *Si A et B sont* positifs*, on pose :*

$$A \times B = \{q \in \mathbb{Q},\ \exists \alpha \in A,\ \exists \beta \in B,\ a > 0,\ b > 0,\ q < ab\}.$$

Pour A et B quelconques, on définit $A \times B$ grâce à la règle des signes.

Propriété 1.4.8. *Muni de $+$, $\times$ et $\leq$, $\mathcal{R}$ est un corps ordonné dont l'élément neutre est $\mathcal{O} = \{q \in \mathbb{Q},\ q < 0\}$ et l'élément unité $\mathcal{I} = \{q \in \mathbb{Q},\ q < 1\}$.*

Démonstration. Laissé en exercice. □

Propriété 1.4.9. *$\mathcal{R}$ est Archimédien.*

Démonstration. Soient A et B deux coupures avec $A > \mathcal{O}$ et $B > \mathcal{O}$. Soit $\alpha > 0$ un rationnel tel que $\alpha \in A$ (qui existe car $A > \mathcal{O}$, ce qui signifie que l'inclusion $\{q \in \mathbb{Q},\ q < 0\} \subset A$ est stricte) et β un rationnel tel que $\beta \notin B$ (qui existe car une coupure ne peut pas être égale à $\mathbb{Q}$), et qui vérifie donc $\beta > 0$. Comme $\mathbb{Q}$ est Archimédien, on peut trouver n tel que $n\alpha > \beta$. Soit q un élément de B. Comme $\beta \notin B$, on a $q < \beta < n\alpha$. Par conséquent, $\frac{q}{n} < \alpha$, et donc $\frac{q}{n} \in A$. On a donc $B \subset \{q \in \mathbb{Q},\ \frac{q}{n} \in A\} = nA$. □

Propriété 1.4.10. *$\mathcal{R}$ vérifie la propriété de la borne supérieure.*

Démonstration. Soit $\mathcal{X}$ un sous-ensemble non-vide majoré de $\mathcal{R}$. On va montrer qu'il admet une borne supérieure. On note $S = \bigcup_{A\in\mathcal{X}} A$ (ne pas oublier que les éléments de $\mathcal{R}$ ont été définis comme des sous-ensembles de $\mathbb{Q}$). Montrons que S est une coupure de $\mathbb{Q}$. Comme $\mathcal{X}$ est non-vide il contient un élément B (et B, qui est une coupure, est non-vide), et $B \subset \bigcup_{A\in\mathcal{X}} A = S$, par conséquent S est non-vide. De plus $\mathcal{X}$ est majoré, donc il existe un élément M (qui, en tant que coupure, est différent de $\mathbb{Q}$) tel que tout élément B de $\mathcal{X}$ vérifie $B \subset M$. Par conséquent, B est différent de $\mathbb{Q}$. Soit x est un élément de S. Comme $S = \bigcup_{A\in\mathcal{X}}$ il existe un A de $\mathcal{X}$ tel que $x \in A$. Comme A est une coupure, $\{y \in \mathbb{Q},\ y \leq x\} \subset A \subset S$ et il existe $z \in A \subset S$ avec $x < z$. L'ensemble S est donc bien une coupure.

Montrons maintenant que S est bien une borne supérieure de $\mathcal{X}$. Il faut pour cela montrer que S est un majorant de $\mathcal{X}$, puis que tout majorant de $\mathcal{X}$ est supérieur à S.

Soit B un élément de $\mathcal{X}$. On a $S = \bigcup_{A\in\mathcal{X}} A$, donc $B \subset S$. S est donc bien un majorant de $\mathcal{X}$.

Soit maintenant M un majorant de $\mathcal{X}$. On a donc, pour tout B de $\mathcal{X}$, l'inclusion $B \subset M$. Par conséquent $S = \bigcup_{A\in\mathcal{X}} A \subset M$. S est donc le plus petit des majorants de $\mathcal{X}$. □

1.4.3 Unicité du corps des réels

On va considérer deux corps vérifiant les conditions du théorème 1.4.2 et montrer qu'il existe un unique isomorphisme entre ces deux corps.

On savait déjà par la propriété 1.3.6 qu'un corps ordonné contenait un unique sous-corps isomorphe à $\mathbb{Q}$ (également noté $\mathbb{Q}$, par abus de notation). On montre maintenant que le fait que $\mathbb{K}$ soit Archimédien revient à dire que ce sous-corps est dense dans $\mathbb{K}$.

Propriété 1.4.11. *Dans un corps ordonné $\mathbb{K}$ Archimédien, on peut encadrer tout élément x par des éléments de $\mathbb{Q}$ arbitrairement proches, au sens où pour tout entier m strictement positif, il existe un encadrement $\frac{n-1}{m} \leq x < \frac{n}{m}$, avec n entier relatif.*

De plus, si $x < y$ sont deux éléments de $\mathbb{K}$ on peut trouver un rationnel q tel que $x < q < y$.

Démonstration. Quitte à remplacer x par $-x$, on peut supposer que $x > 0$. Soit m un entier naturel. Comme $\mathbb{K}$ est Archimédien, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N},\ x < \frac{k}{m}\}$ est non-vide. On note n son plus petit élément. On a donc $x < \frac{n}{m}$ et $\frac{n-1}{m} \leq x$.

Ensuite, si $x < y$, comme K est Archimédien, on peut trouver m tel que $m > \frac{1}{y-x}$, de sorte que $\frac{1}{m} < y - x$. Il existe alors, par la première partie de la proposition, un entier n tel que $\frac{n-1}{m} \leq x < \frac{n}{m}$. On a alors, $\frac{n}{m} = \frac{n-1}{m} + \frac{1}{m} < x + (y-x) = y$. Le rationnel $\frac{n}{m}$ vérifie bien $x < \frac{n}{m} < y$. □

Nous allons maintenant faire la démonstration de l'"unicité" de $\mathbb{R}$. Soient $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}'$ deux corps satisfaisant les conditions du théorème 1.4.2. Nous allons construire un isomorphisme entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}'$. Par la propriété 1.3.6, les deux corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}'$ contiennent respectivement deux corps $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}'$ isomorphes au corps des nombres rationnels. On notera $q \mapsto q'$ l'isomorphisme entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}'$ Soit x un élément de $\mathbb{R}$. On considère le sous-ensemble A_x de $\mathbb{Q}$ défini par

$$A_x = \{q \in \mathbb{Q},\ q < x\}.$$

Lemme 1.4.12. *A_x est majoré et $\sup A_x = x$. De plus, A_x admet également un majorant dans $\mathbb{Q}$.*

Démonstration. Tout d'abord, A est majoré par x, et la propriété 1.4.11 donne l'existence d'un majorant rationnel de x. Il admet donc une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, notée s. La définition de A montre que $s \leq x$, car x est un majorant de A. Mais si $s < x$, la propriété 1.4.11 donne un rationnel q tel que $s < q < x$. Le rationnel q est alors un élément de A strictement supérieur à $s = \sup A$, ce qui est une contradiction. Par conséquent $x = s$. $\square$

On note
$$A'_x = \{q' \in \mathbb{Q}',\ q \in A_x\}.$$
L'ensemble A'_x est un sous-ensemble de $\mathbb{R}'$ majoré par q'_0, où q_0 est un majorant rationnel de A_x, et admet donc une borne supérieure dans $\mathbb{R}'$. On définit donc une application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}'$ par
$$\varphi\ :\ x \mapsto \sup A'_x.$$
On va montrer que φ est un isomorphisme de corps croissant, ce qui achèvera la démonstration.

Tout d'abord, on remarque que si $x \leq y$, on a $A_x \subset A_y$, de sorte que $A'_x \subset A'_y$, ce qui montre que φ est croissant. Ensuite, on remarque que si x et y sont deux éléments de $\mathbb{K}$, on a $A_x + A_y = A_{x+y}$, ce qui fait que
$$\sup A'_x + \sup A'_y = \sup A'_{x+y}.$$
Des arguments similaire (en séparant les cas suivant le signe de x et y) montrent que
$$\sup A'_x \times \sup A'_y = \sup A'_{xy}.$$
On a donc bien affaire à un morphisme de corps. On peut de même construire un morphisme de corps de $\mathbb{R}'$ vers $\mathbb{R}$, et l'on montre que ces deux morphismes sont réciproques l'un de l'autre, ce qui montre que l'on a affaire à des isomorphismes.

1.4.4 Quelques propriétés en vrac

Approximation décimale

La propriété 1.4.11 montre que pour tout réel x et tout entier naturel x on peut trouver un encadrement de la forme
$$\frac{k}{10^n} \leq x < \frac{k+1}{10^n}.$$
Les nombres $\frac{k}{10^n}$ et $\frac{k+1}{10^n}$ sont respectivement appelés des approximations décimales de x par défaut et par excès. L'intérêt est qu'un rationnel de la forme $\frac{k}{10^n}$ peut être exprimé sous forme d'un développement décimal *fini*.

On verra plus loin (dans le chapitre sur les séries), comment tout réel s'exprime à l'aide d'un développement décimal, éventuellement infini.

Partie entière

La propriété 1.4.11 montre que pour tout réel x, il existe un unique entier n tel que $n \leq x < n + 1$. On appelle n la partie entière de x et on le note $E(x)$.

Approximation rationnelle quadratique

On va ici préciser la propriété 1.4.11. En effet, étant donnés un réel x et un entier m, il existe un encadrement
$$\frac{n}{m} \leq x < \frac{n+1}{m}.$$
Une majoration de l'erreur dans cette appoximation est alors donnée par $|x - \frac{n}{m}| \leq \frac{1}{m}$. On va montrer que si m est bien choisi, on peut avoir une approximation bien plus précise.

Propriété 1.4.13. *Soit x un nombre réel et soit N un entier naturel. Il existe n et m deux entiers avec $n \leq N$ et $m \leq N$ tels que*
$$\left|\frac{n}{m} - x\right| \leq \frac{1}{mN}.$$

Démonstration. Pour tout $m \in \{0, \ldots, N\}$, il existe un entier n_m tel que
$$n_m \leq mx < n_m + 1.$$
On considère alors l'ensemble
$$A = \{mx - n_m,\ m \in \{0, \ldots, N\}\} \subset [0, 1[.$$
L'ensemble A a $N + 1$ éléments, donc si on écrit $[0, 1]$ comme une union de de N intervalles :
$$[0, 1] = \bigcup_{k=1}^{N} \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right[,$$
il existe un entier k tel que $[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}[\cap A$ ait deux éléments (note 8) $px - n_p$ et $qx - n_q$, avec $p \neq q$. On a donc
$$|(q - p)x - (n_q - n_p)| \leq \frac{1}{N}.$$
On en déduit que
$$\left|x - \frac{n_q - n_p}{q - p}\right| \leq \frac{1}{(q - p)N}.$$
Il suffit de poser $n = n_q - n_p$ et $m = q - p$ pour conclure. □

Valeur absolue

Définition 1.4.14. *Étant donné un réel x, on pose $|x| = \max(-x, x)$. De manière équivalente, si $x \geq 0$ on a $|x| = x$ et si $x < 0$ on a $|x| = -x$.*

Propriété 1.4.15. *Si x et y sont deux réels, on a les inégalités*
$$||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|.$$

(note 8). On met $N + 1$ objets dans N ensemble. Par conséquent, les $N + 1$ objets ne peuvent pas tous se retrouver dans des ensembles distincts. Ce principe s'appelle le *principe des tiroirs*.

Démonstration. On a $x \leq |x|$ et $-y \leq |y|$, de sorte que, par addition, $x - y \leq |x| + |y|$. De même, on a $y - x \leq |x| + |y|$. Comme $|x - y| = \max(x - y, y - x)$, on a prouvé l'inégalité de droite.

Pour la première inégalité, on écrit

$$|x| = |y + (x - y)| \leq |y| + |x - y|,$$

ce qui donne $|x| - |y| \leq |x - y|$ De même, on a $|y| - |x| \leq |x - y|$. On a alors $||x| - |y|| = \max(|x| - |y|, |y| - |x|) \leq |x - y|$. □

Chapitre 2

Suites numériques

2.1 Un peu de vocabulaire

Définition 2.1.1. *Une* suite réelle *est une fonction de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$.

On utilisera la notation $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour désigner les suites de réels, où u_n est l'image de n par la suite. L'ensemble des suites réelles (parfois noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ en définissant, pour deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel λ

$$\lambda \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

et

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Définition 2.1.2. *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* croissante *si elle vérifie la proposition*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n.$$

Si l'inégalité est stricte, on dit que la suite est strictement croissante. *De même on dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* décroissante *si elle vérifie*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n,$$

et qu'elle est strictement décroissante si l'inégalité est stricte. Une suite croissante ou décroissante est dite monotone.

Définition 2.1.3. *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* majorée *si elle vérifie*

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M.$$

De même, on définit une suite minorée. *Un suite majorée et minorée est dite* bornée.

2.2 Convergence des suites

On dit qu'une suite de réels *converge* vers un réel l si elle satisfait la proposition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon).$$

Autrement dit, si on se fixe *a priori* un seuil d'erreur (à savoir ε), il suffira d'aller assez loin dans la suite (au-delà de N) pour que tous les termes de la suite valent l, avec une erreur inférieure au seuil.

Si une suite ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*.

Propriété 2.2.1. *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l, alors ce réel est unique, et on le note $l = \lim_n u_n$. On utilisera également la notation $u_n \to_n l$.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, et soient deux réels l et l', avec $l < l'$. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l, et montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers l'. On pose $\varepsilon = \frac{l'-l}{2}$. Par définition de la convergence d'une suite, il existe un entier N tel que si $n \geq N$, on a $|u_n - l| < \varepsilon$. L'inégalité triangulaire donne alors que pour $n \geq N$,

$$2\varepsilon = l' - l \leq |u_n - l'| + |u_n - l| < \varepsilon + |u_n - l'|.$$

Autrement dit, $|u_n - l'| > \varepsilon$ pour n assez grand, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers l'. □

En revanche, certaines suites ne convergent vers aucun réel. Par exemple, la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. On prendra donc garde à ne pas utiliser la quantité $\lim_n u_n$ *avant* d'avoir montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Notamment, on se souviendra que la notation $u_n \to_n l$ signifie : “la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim_n u_n = l$”.

Propriété 2.2.2. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l si et seulement si la suite $(u_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers* 0.

Démonstration. Il suffit de récrire la définition. □

Propriété 2.2.3. *Si deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors leur somme converge et vérifie*

$$\lim_n (u_n + v_n) = \lim_n u_n + \lim_n v_n.$$

De même si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et si λ est un réel, alors $\lambda\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite vaut :

$$\lim_n \lambda u_n = \lambda \lim_n u_n.$$

Autrement dit, l'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel et l'application $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim_n u_n$ est linéaire.

Démonstration.
- Pour la suite $\lambda\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
  Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que pour $n \geq N$ on ait $|u_n - \lim_n u_n| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda}$. On a alors pour $n \geq N$,

$$\left|\lambda u_n - \lambda \lim_n u_n\right| \leq \varepsilon.$$

- Pour la somme de deux suites :
  Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, on ait (note 1)

$$\left|u_n - \lim_n u_n\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left|v_n - \lim_n v_n\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(note 1). La convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne un entier N_1 à partir duquel $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à moins de $\varepsilon/2$ de sa limite. De même, on a un entier N_2 à partir duquel $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à moins de $\varepsilon/2$ de sa limite. On prend alors $N = \max(N_1, N_2)$.

On a alors pour $n \geq N$

$$\left|(u_n + v_n) - (\lim_n u_n + \lim_n v_n)\right| \leq \left|u_n - \lim_n u_n\right| + \left|v_n - \lim_n v_n\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Propriété 2.2.4. *Une suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers une limite l. Par définition de la convergence d'une suite (avec $\varepsilon = 1$), il existe un entier N tel que si $n \geq N$, alors

$$|u_n - l| \leq 1, \quad \text{ou encore} \quad l - 1 \leq u_n \leq l + 1.$$

On a donc, pour tout n, l'encadrement

$$\min(u_0, \ldots, u_N, l - 1) \leq u_n \leq \max(u_0, \ldots, u_N, l + 1).$$

□

La réciproque est bien entendu fausse, la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée sans être convergente (pour montrer que cette suite n'est pas convergente, on peut par remarquer qu'elle n'est pas de Cauchy, puisque $|u_n - u_{n+1}| = 2$, voir propriété 2.3.6).

La propriété 2.2.4 nous permet de montrer que la convergence est aussi stable par produit :

Propriété 2.2.5. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes, alors la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et vérifie*

$$\lim_n u_n v_n = \left(\lim_n u_n\right)\left(\lim_n v_n\right).$$

De plus, si $\lim_n v_n \neq 0$, alors à partir d'un certain rang, on a $v_n \neq 0$, de sorte que l'on peut parler de la convergence de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite converge et on a

$$\lim_n \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim_n u_n}{\lim_n v_n}.$$

Démonstration. Les suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes donc bornées. Soit donc M tel que $|u_n| \leq M$ et $|v_n| \leq M$ quel que soit n. Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, on ait (note 2)

$$\left|u_n - \lim_n u_n\right| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{et} \quad \left|v_n - \lim_n v_n\right| \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

On a alors, pour $n \geq M$

$$\begin{aligned}\left|u_n v_n - \lim_n u_n \lim_n v_n\right| &\leq \left|u_n v_n - u_n \lim_n v_n\right| + \left|u_n \lim_n v_n - \lim_n u_n \lim_n v_n\right| \\ &= |u_n| \left|v_n - \lim_n v_n\right| + \left|u_n - \lim_n u_n\right| \left|\lim_n v_n\right| \\ &\leq M \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M} M = \varepsilon.\end{aligned}$$

(note 2). Voir note (note 1).

On a bien la convergence de $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers le produit des limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour la deuxième partie de la propriété, en prenant $\varepsilon = \frac{|\lim_n v_n|}{2} > 0$ dans la définition de la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on trouve un entier N tel que pour $n \geq N$, on ait $|v_n - \lim_n v_n| \leq \frac{|\lim_n v_n|}{2}$, ce qui implique

$$|v_n| \geq \left|\lim_n v_n\right| - \left|v_n - \lim_n v_n\right| \geq \left|\lim_n v_n\right| - \frac{|\lim_n v_n|}{2} = \frac{|\lim_n v_n|}{2}.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend donc bien des valeurs non-nulles pour $n \geq N$. Il suffit maintenant de montrer que $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{\lim_n v_n}$. Remarquons que

$$\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\lim_n v_n} = \frac{\lim_n v_n - v_n}{v_n \lim_n v_n}.$$

On a vu précédemment qu'il existe un entier N pour lequel, si $n \geq N$, on a $|v_n| \geq \frac{|\lim_n v_n|}{2}$. On a donc, pour $n \geq N$

$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\lim_n v_n}\right| = \frac{|\lim_n v_n - v_n|}{|v_n \lim_n v_n|} \leq 2\frac{|\lim_n v_n - v_n|}{|\lim_n v_n|^2}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Il existe un entier $\tilde{N}$ tel que si $n \geq \tilde{N}$, on a $|v_n - \lim_n v_n| \leq \frac{|\lim_n v_n|^2 \varepsilon}{2}$. Par conséquent, si $n \geq \max(N, \tilde{N})$, on a

$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\lim_n v_n}\right| \leq 2\frac{|\lim_n v_n - v_n|}{|\lim_n v_n|^2} \leq \varepsilon,$$

ce qui achève la preuve. □

Définition 2.2.6. *On dit qu'une suite réelle* diverge vers ∞ *si elle vérifie la proposition*

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \geq M.$$

On notera alors $\lim_n u_n = \infty$ *ou* $u_n \to_n \infty$. *De même, on dit qu'une suite réelle* diverge vers $-\infty$ *si elle vérifie la proposition*

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \leq M.$$

On utilisera alors la notation $\lim_n u_n = -\infty$ *ou* $u_n \to_n -\infty$.

En réalité, une suite divergente vers $\pm\infty$ est pour plusieurs raisons plus proche d'une suite convergente que d'une suite divergente quelconque. Notamment, les propriétés 2.2.3 et 2.2.5 restent vraies pour des suites qui divergent vers $\pm\infty$, si l'on suit les règles d'addition et de multiplication pour les infinis (avec $x \in \mathbb{R}$) :

$$\infty + x = \infty \ \ ; \ \ \infty + \infty = \infty \ \ ; \ \ \infty \times \infty = \infty \ \ ; \ \ x \times \infty = \text{signe}(x)\infty \ \ ; \ \ \frac{x}{\infty} = 0.$$

De plus, si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\frac{x}{0^+} = \text{signe}(x)\infty,$$

où la notation 0^+ désigne la limite d'une suite convergeant vers 0 par valeurs positives. On fera en revanche attention aux formes indéterminées

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0} \quad \text{et} \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Par conséquent, on s'autorisera également à dire qu'une suite "converge vers ∞" (ou vers $-\infty$). Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (vers un réel) ou diverge vers $\pm\infty$, on dira que la $\lim_n u_n$ *existe dans* $[-\infty, \infty]$. Pour éviter les confusions, on précisera à chaque fois si la suite converge *vers un réel fini* ou converge *dans* $[-\infty, \infty]$.

On a une propriété de préservation de l'ordre par passage à la limite.

Propriété 2.2.7. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que $\lim_n u_n$ et $\lim_n v_n$ existent dans $[-\infty, \infty]$. Si pour tout entier n on a l'inégalité $u_n \leq v_n$, alors les limites vérifient*

$$\lim_n u_n \leq \lim_n v_n.$$

Démonstration. On ne traite que le cas où les limites sont finies, le cas où au moins une des limite est infinie se traitant de manière similaire. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes telles que

$$\lim_n u_n > \lim_n v_n.$$

On va exhiber un entier N tel que $u_N > v_N$, ce qui achèvera la preuve. Soit $\varepsilon = \frac{\lim_n u_n - \lim_n v_n}{2}$. Il existe un entier N tel que la proposition suivante soit vérifiée :

$$\forall m \geq N, \ |u_m - \lim_n u_n| < \varepsilon \texttt{ et } |v_m - \lim_n v_n| < \varepsilon.$$

On en déduit alors, par l'inégalité triangulaire,

$$v_N < \lim v_n + \varepsilon = \frac{\lim_n u_n + \lim_n v_n}{2} = \lim_n u_n - \varepsilon < u_N,$$

ce qui montre que $v_{n_0} < u_{n_0}$. □

Il est important de remarquer que l'inégalité $u_n < v_n$ ne donne pas une inégalité stricte à la limite : par exemple, on a $0 < \frac{1}{n}$, mais $\lim_n 0 = 0 = \lim_n \frac{1}{n}$.

Propriété 2.2.8 (Théorème des gendarmes)**.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite finie l. On suppose que pour tout n, on ait l'inégalité*

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Alors $\lim_n v_n$ existe et vaut l.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe un entier N tel si $n \geq N$, on a $|u_n - l| \leq \varepsilon$ et $|w_n - l| \leq \varepsilon$. Or, on a $u_n - l \leq v_n - l \leq w_n - l$, ce qui implique que $|v_n - l| \leq \max(|u_n - l|, |w_n - l|)$. Par conséquent, si $n \geq N$, on a $|v_n - l| \leq \max(|u_n - l|, |w_n - l|) \leq \varepsilon$. □

Propriété 2.2.9. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites vérifiant pour tout n l'inégalité $u_n \leq v_n$ et supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers ∞. Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers ∞.*

De même si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Démonstration. On ne fait la preuve que dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers ∞, l'autre cas étant totalement similaire. Soit M un réel. Par définition, il existe N tel que si $n \geq N$, on a $M \leq u_n \leq v_n$, ce qui achève la preuve. □

2.3 Quelques critères de convergence

2.3.1 Suites monotones

Propriété 2.3.1. *Une suite croissante et majorée est convergente (vers une limite finie). De même, une suite décroissante et minorée converge.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée. On va montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sup_n u_n$ (qui et bien défini et appartient à $\mathbb{R}$, la suite étant majorée).

Soit ε un réel positif. Par définition de la borne supérieure, il existe un entier N tel que $u_N \geq \sup_n u_n - \varepsilon$. Comme la suite est croissante, on a donc, pour tout $n \geq N$, l'inégalité

$$\sup_n u_n - \varepsilon \leq u_N \leq u_n \leq \sup_n u_n.$$

Par conséquent, on a pour tout $n \geq N$, $|u_n - \sup_n u_n| \leq \varepsilon$. Ce qui achève la preuve. □

La propriété 2.3.1 dit en substance qu'une suite croissante ne peut avoir que deux comportement : ou bien elle est bornée, auquel cas elle converge vers un réel fini, ou bien elle n'est pas bornée, auquel cas elle tend vers ∞.

La propriété 2.3.1 peut sembler évidente à première vue, mais elle repose en fait fortement sur la *complétude* de $\mathbb{R}$. Notamment, pour exhiber une limite à la suite, on a dû utiliser la propriété de la borne supérieure. La propriété 2.3.1 n'est notamment pas vraie dans $\mathbb{Q}$. Par exemple, la suite

$$3 \ ; \ 3.1 \ ; \ 3.14 \ ; \ 3.141 \ ; \ 3.1415 \ ; \ 3.14159 \ ; \ 3.141592 \ ; \ ..., \tag{2.1}$$

où l'on rajoute à chaque itération une décimale de π est bien croissante mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$, puisque sa limite π n'est pas dans $\mathbb{Q}$.

2.3.2 Suites adjacentes

La définition suivante permet de donner un critère efficace de convergence des suites.

Définition 2.3.2. *On dit que deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont* adjacentes *si elles vérifient les propriétés suivantes :*
- *Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante ;*
- *on a la convergence $v_n - u_n \to_n 0$.*

On peut remarquer que deux suites adjacentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient nécéssairement $u_n \leq v_n$, pour tout entier n. En effet, la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et convergeant vers 0, elle est à termes positifs ou nuls.

La notion de suites adjacentes tire son intérêt du théorème suivant.

Théorème 2.3.3. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes, alors elles convergent (dans $\mathbb{R}$) et leur limites sont égales. De plus on a, pour tout n entier, l'inégalité*

$$u_n \leq \lim_n u_n = \lim_n v_n \leq v_n.$$

Démonstration. Par définition de suites adjacentes, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par v_0), et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par u_0). Par la propriété 2.3.1, ces suites sont donc convergentes vers des limites finies. De plus, on a

$$\lim_n u_n - \lim_n v_n = \lim_n u_n - v_n = 0,$$

les limites sont donc égales. □

Une autre forme de ce théorème est la suivante.

Propriété 2.3.4 (Théorème des segments emboîtés)**.** *Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de segments de $\mathbb{R}$ décroissante, c'est-à-dire vérifiant*

$$I_{n+1} \subset I_n$$

et telle que la taille des I_n tende vers 0 au sens ou

$$|\sup I_n - \inf I_n| \to 0.$$

Alors, l'ensemble $\bigcap_n I_n$ contient un unique élément.

Démonstration. Il suffit de remarquer que les suite $(\inf I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sup I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes qui convergent donc vers une limite commune l. On montre alors que $\bigcap_n I_n = \{l\}$. En effet $\inf I_n \leq l \leq \sup I_n$ pour tout n puisque les suites sont adjacentes, donc $l \in \bigcap_n I_n$. De plus, si $x \neq l$, disons pour fixer les idées $l < x$, alors $\sup I_n < x$ à partir d'un certain rang n_0 et donc $x \notin I_{n_0}$. □

2.3.3 Suites de Cauchy

Un critère puissant et général pour caractériser les suites convergentes est le suivant.

Définition 2.3.5. *On dit qu'une suite de réels est* de Cauchy *si elle vérifie la propriété suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ (n \geq N \ \textit{et}\ m \geq N) \Rightarrow (|u_n - u_m| \leq \varepsilon).$$

Cette proposition peut se comprendre comme

$$\lim_{m,n\to\infty} |u_n - u_m| = 0.$$

La propriété importante des suites de Cauchy est la suivante :

Propriété 2.3.6. *Une suite réelle converge dans $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est de Cauchy.*

Le fait qu'une suite convergente soit de Cauchy est un fait général, mais la réciproque est directement liée à la complétude de $\mathbb{R}$. En fait elle lui est équivalente, et on utilise d'ailleurs habituellement la convergence des suites de Cauchy pour définir la complétude. Par exemple la suite définie en (2.1) est une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ (sa limite est dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente (vers une limite $l \in \mathbb{R}$) et soit ε un réel positif. Il existe un entier N tel que si $n \geq N$, $|u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, si $n, m \geq N$, on

$$|u_n - u_m| \leq |u_n - l| + |u_m - l| \leq \varepsilon.$$

La suite est donc bien de Cauchy.

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit de Cauchy. On remarquera, en prenant par exemple $\varepsilon = 1$ dans la définition d'une suite de Cauchy, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On peut donc définir $l_n = \sup_{k\geq n} u_k$, qui est également une suite bornée (car $l_n \in [\inf_n u_n, \sup_n u_n]$). La suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. Elle est donc convergente vers une limite l, par la propriété 2.3.1. Montrons mantenant que l est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour $n \geq N$ et $m \geq N$, on a $|u_n - u_m| \leq \varepsilon$. On a donc

$$u_n - \varepsilon \leq u_m \leq u_n + \varepsilon.$$

Soit $k \geq N$. En prenant la borne supérieure sur $m \geq k$, on trouve

$$u_n - \varepsilon \leq l_k \leq u_n + \varepsilon,$$

et en prenant la limite en $k \to \infty$, on obtient

$$u_n - \varepsilon \leq l \leq u_n + \varepsilon.$$

On a donc montré $|u_n - l| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. □

On remarquera qu'on a effectivement eu besoin d'utiliser la complétude de $\mathbb{R}$ pour montrer que les suites de Cauchy convergent, à travers la propriété 2.3.1.

2.3.4 Valeurs d'adhérences, limites inférieures et supérieures

En fait, dans la preuve de la propriété 2.3.6, on a utilisé sans en parler la notion suivante.

Définition 2.3.7. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle* limite supérieure *de la suite la quantité (appartenant à $[-\infty, \infty]$) définie par*(note 3)

$$\limsup_n u_n = \lim_N \sup_{n\geq N} u_n = \inf_N \sup_{n\geq N} u_n.$$

De même, on appelle limite inférieure *la quantité (appartenant à $[-\infty, \infty]$) définie par*

$$\liminf_n u_n = \lim_N \inf_{n\geq N} u_n = \sup_N \inf_{n\geq N} u_n.$$

On a toujours l'inégalité

$$\liminf_n u_n \leq \limsup_n u_n.$$

Démonstration de l'inégalité. On a $\inf_{k\geq n} u_k \leq u_n \leq \sup_{k\geq n} u_k$. On conclut en passant à la limite que $\liminf_n u_n \leq \limsup_n u_n$. □

(note 3). Comme la suite $(\sup_{n\geq N} u_n)_{N\in\mathbb{N}}$ est décroissante, elle converge vers sa borne inférieure, quitte à considérer une borne inférieure infinie.

L'intérêt de cette notion est que *toute* suite réelle admet une limite supérieure et une limite inférieure (éventuellement infinies). On peut donc toujours passer à la limite inférieure ou supérieure, sans avoir à tout d'abord vérifier une quelconque convergence, contrairement au limites classiques.

Le lien entre la notion de limite supérieure/inférieure et la notion de limite est donné par la propriété suivante.

Propriété 2.3.8. *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge si et seulement* $\limsup_n u_n$ *et* $\liminf_n u_n$ *sont égales, et sa limite est alors donnée par*

$$\lim_n u_n = \liminf_n u_n = \limsup_n u_n.$$

Démonstration. On ne fait que la preuve dans le cas où les limites sont finies. Le cas des limites infinies est similaire.

Supposons que $\limsup_n u_n = \limsup_n v_n = l$, et soit ε un réel strictement positif. Comme les suite $(\inf_{n\geq N} u_n)_{N\in\mathbb{N}}$ et $(\sup_{n\geq N} u_n)_{N\in\mathbb{N}}$ convergent vers l respectivement en croissant et en décroissant, il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, on ait

$$l \leq \sup_{n\geq N} u_n \leq l+\varepsilon \quad \text{et} \quad l-\varepsilon \leq \inf_{n\geq N} u_n \leq l.$$

On a alors, pour $n \geq N$,

$$l-\varepsilon \leq \inf_{n\geq N} u_n \leq u_n \leq \sup_{n\geq N} u_n \leq l+\varepsilon,$$

et $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

Inversement, si u_n converge, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un entier N tel que $|u_n - \lim_n u_n| \leq \varepsilon$. Par conséquent, $u_n \in [\lim_n u_n - \varepsilon, \lim_n u_n + \varepsilon]$. En passant à la borne inférieure, on trouve, pour $n \geq N$

$$\inf_{k\geq n} u_k \in [\lim_n u_n - \varepsilon, \lim_n u_n + \varepsilon] \quad \text{d'où} \quad \liminf_n u_n \in [\lim_n u_n - \varepsilon, \lim_n u_n + \varepsilon]$$

et de même pour la limite supérieure. Cette inclusion étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $\limsup_n u_n = \liminf_n u_n = \lim_n u_n$. □

Définition 2.3.9. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. On appelle* sous-suite*, ou* suite extraite *de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de la forme* $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$*, où* φ *est une fonction strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$.

Remarquer que si l'on considère la sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et que l'on en extrait à nouveau une sous-suite, le résultat est de la forme $\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 2.3.10. *On dit que* $l \in [-\infty, \infty]$ *est une* valeur d'adhérence *de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si il existe une sous-suite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* l*. Par extension, on dit que* ∞ *(ou* $-\infty$*) est valeur d'adhérence si il existe une sous-suite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui diverge vers* ∞ *(ou* $-\infty$*).*

On peut redéfinir les notions de limites supérieures et inférieures à partir de la notion de sous-suites.

Propriété 2.3.11. *La limite supérieure (*resp. *inférieure) d'une suite est la plus grande (*resp. *petite) de ses valeurs d'adhérence.*

Démonstration. Soit $\lambda \in [-\infty, \infty]$ une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe une sous-suite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers λ. Or, on a

$$\inf_{k\geq\varphi(n)} u_k \leq u_{\varphi(n)} \leq \sup_{k\geq\varphi(n)} u_k.$$

En passant à la limite $n \to \infty$, on trouve

$$\liminf_n u_n \leq \lambda \leq \limsup_n u_n.$$

Pour montrer que la limite supérieure est la plus grande valeur d'adhérence, il ne reste plus qu'à montrer que c'est effectivement une valeur d'adhérence. Pour cela on construit par récurrence une sous-suite de la manière suivante. On pose $\varphi(0) = 0$. Soit n un entier. On suppose φ défini jusqu'au rang n. On pose alors

$$\varphi(n+1) = \min A_n, \quad \text{avec} \quad A_n = \left\{ k \in \mathbb{N},\ k > \varphi(n) \ \texttt{et} \ u_k \geq \left(\sup_{q>\varphi(n)} u_q - \frac{1}{n+1} \right) \right\}.$$

L'ensemble A_n est un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}$. Par conséquent, il admet un plus petit élément, et la définition de φ a bien un sens, et par définition, $\varphi(n+1) > \varphi(n)$. La fonction φ définit donc bien une sous-suite. On a alors, pour $n \geq 1$,

$$\sup_{q>\varphi(n-1)} u_q - \frac{1}{n} \leq u_{\varphi(n)} \leq \sup_{q>\varphi(n-1)} u_q.$$

En appliquant le théorème des gendarmes, on trouve que $u_{\varphi(n)} \to \limsup_n u_n$. Une construction symétrique convient pour la limite inférieure. □

On en déduit le résultat suivant.

Propriété 2.3.12. *Une suite converge (dans $[-\infty, \infty]$) ssi elle a une unique valeur d'adhérence.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des propriétés 2.3.8 et 2.3.11. □

Théorème 2.3.13 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toute suite bornée admet une sous-suite convergente (vers un réel fini).*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée : pour tout n, on a $-M \leq u_n \leq M$ pour un certain réel M. Par conséquent, $-M \leq \limsup_n u_n \leq M$. Par la propriété 2.3.11 ; il existe une sous-suite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\limsup_n u_n$, ce qui montre le résultat.

□

2.4 Relations de comparaison

On utilise les notations suivantes pour comparer les croissances de deux suites.

Définition 2.4.1 (Notations de Landau)**.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.*

– *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* négligeable *devant* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et on note* $u_n = o(v_n)$ *(ou parfois* $u_n \ll v_n$*) si on peut écrire*
$$u_n = \varepsilon_n v_n, \quad \textit{avec} \ \ \varepsilon_n \to_n 0.$$
Si $v_n \neq 0$*, cette définition revient à*
$$\frac{u_n}{v_n} \to 0 \ ;$$

– *on dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* dominée *par* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et on note* $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ *si il existe* $M > 0$ *tel que*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leq M|v_n|.$$
Si $v_n \neq 0$*, cette définition revient à*
$$\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{est bornée} \ ;$$

– *on dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* équivalente *à* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et on note* $u_n \sim v_n$ *si*
$$u_n - v_n = o(v_n)$$
Si $v_n \neq 0$*, cette définition revient à*
$$\frac{u_n}{v_n} \to 1.$$

On remarquera que les notations $u_n = o(1)$, $1 = o(u_n)$, $u_n = \mathcal{O}(1)$ et $u_n \sim \lambda$ signifient respectivement $u_n \to 0$, $u_n \to \infty$, “u_n est bornée” et $u_n \to \lambda$.

Les relations o, $\mathcal{O}$ “ressemblent” à des relations d'ordre, et la relation $\sim$ ressemble à une relation d'équivalence, au vu de la propriété suivante :

Propriété 2.4.2. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *trois suites réelles. Alors :*
– *si* $u_n = o(v_n)$ *et* $v_n = o(w_n)$*, alors* $u_n = o(w_n)$ *;*
– *si* $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ *et* $v_n = \mathcal{O}(w_n)$*, alors* $u_n = \mathcal{O}(w_n)$ *;*
– *si* $u_n \sim v_n$ *et* $v_n \sim w_n$*, alors* $u_n \sim w_n$ *;*
– *si* $u_n \sim v_n$ *alors* $v_n \sim u_n$*.*

Démonstration. Toutes ces preuves sont très similaires, on ne fait que la première. On suppose que $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$. Par définition, cela signifie qu'il existe deux suite tendant vers 0, notées $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n = \varepsilon_n v_n$ et $v_n = \eta_n w_n$. On peut donc écrire, $u_n = \varepsilon_n v_n = \varepsilon_n \eta_n w_n$. La suite $(\varepsilon_n\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend bien vers 0, ce qui montre que $u_n = o(w_n)$. □

On utilisera souvent l'écriture très commode $u_n = v_n + o(w_n)$ pour signifier $u_n - v_n = o(w_n)$ (et de même pour les $\mathcal{O}$).

On fera attention au fait que la relation notée $u_n = o(v_n)$ est plus une relation d'appartenance qu'un relation d'égalité. En effet, $u_n = o(v_n)$ est à comprendre comme
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left\{(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est négligeable devant } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}.$$
Une remarque importante est que la relation $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(n)$ est vraie, alors que $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(1)$ est fausse. En fait ces relations sont des *inclusions* : l'ensemble des suites dominées par 1 est inclus dans l'ensemble des suites dominées par n ($\mathcal{O}(1) \subset \mathcal{O}(n)$), mais la réciproque n'est pas vraie ($\mathcal{O}(n) \not\subset \mathcal{O}(1)$).

On peut effectuer les opérations suivantes sur les relations de comparaison.

Propriété 2.4.3. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, des suites réelles et λ un réel.*
- *Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$;*
- *si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$ et $\lambda u_n = o(u_n)$;*
- *si $u_n = \mathcal{O}(w_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(w_n)$, alors $u_n + v_n = \mathcal{O}(w_n)$ et $\lambda u_n = \mathcal{O}(u_n)$;*
- *on suppose que $u_n \sim \tilde{u}_n$ et $v_n \sim \tilde{v}_n$. Alors $u_n v_n \sim \tilde{u}_n \tilde{v}_n$.*

En toute généralité, on ne peut pas sommer des équivalents (note 4), la notion d'équivalence étant plutôt basée sur la multiplication. Par exemple, $1 + \frac{1}{n} \sim 1$, mais

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) + (-1) = \frac{1}{n} \quad \text{n'est pas équivalent à} \quad 1 + (-1) = 0. \tag{2.2}$$

De manière générale, on rencontre très rarement la relation $u_n \sim 0$ qui signifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

Toutefois, si l'on connaît des équivalences $u_n \sim \tilde{u}_n$ et $v_n \sim \tilde{v}_n$, et que l'on veut dire quelque chose sur $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut écrire

$$u_n + v_n = (\tilde{u}_n + o(\tilde{u}_n)) + (\tilde{v}_n + o(\tilde{v}_n)) = \tilde{u}_n + \tilde{v}_n + o(\tilde{u}_n) + o(\tilde{v}_n).$$

La question qui se pose alors est de comparer les suites $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\tilde{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'exemple de (2.2) devient alors

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) + (-1) = 1 + o(1) + (-1 + o(1)) = o(1).$$

(car $o(1) = o(-1)$).

Le théorème suivant permet de décrire les vitesses relatives de quelques suites courantes.

Théorème 2.4.4. *Soient $\alpha > 1$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ trois réels. On a* (note 5)

$$\alpha^{-n} \ll n^{-\beta} \ll \ln^{-\gamma}(n) \ll 1 \ll \ln^{\gamma}(n) \ll n^{\beta} \ll \alpha^n.$$

Avant de commencer la preuve, on énonce un lemme préliminaire :

Lemme 2.4.5. *Si $\alpha > 1$, alors $\alpha^n \to \infty$. Notamment, si $0 < \alpha < \alpha'$, alors $\alpha^n = o(\alpha'^n)$.*

Démonstration. Comme $\alpha > 1$, la suite $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (avec $\alpha^0 = 1$). Par conséquent elle converge (dans $[1, \infty]$). On a alors

$$\lim_n \alpha^n = \lim_n \alpha^{n+1} = \lim_n \alpha\alpha^n = \alpha \lim_n \alpha^n.$$

Comme $\alpha > 1$, on a nécessairement $\lim_n \alpha^n = \infty$. Si $0 < \alpha < \alpha'$, on voit que

$$\frac{\alpha'^n}{\alpha^n} = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^n \to \infty, \quad \text{d'où} \quad \frac{\alpha^n}{\alpha'^n} \to 0$$

puisque $\frac{\alpha}{\alpha'} > 1$. On a donc bien $\alpha^n = o(\alpha'^n)$. $\square$

(note 4). Toutefois, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\tilde{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites *positives*, avec $u_n \sim \tilde{u}_n$ et $v_n \sim \tilde{v}_n$, alors $u_n + v_n \sim \tilde{u}_n + \tilde{v}_n$.

(note 5). En toute rigueur, les expressions $\ln(n)$ et n^{β} pour $\beta \notin \mathbb{Z}$ n'ont pas encore été définies. On pourra pour l'instant se limiter aux cas $\beta \in \mathbb{Z}$ et $\gamma \in \mathbb{Z}$, et définir $\ln(n)$ comme étant le nombre de chiffre de n dans une base donnée.

Preuve du théorème. En vertu de la propriété 2.2.5, il suffit de montrer

$$1 \ll \ln^\gamma(n) \ll n^\beta \ll \alpha^n$$

pour $\alpha > 1$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$.

Par définition, il existe une constante telle que si $n \in [10^k, 10^{k+1}[$, on ait $\ln(n) \in [Ck, C(k+1)[$. Par conséquent, $\ln(n)$ tend vers l'infini : en effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $n \geq 10^k$, $\ln(n)/C \geq k$. Cela montre la première relation $1 \ll \ln^\gamma(n)$.

La relation $n^\beta \ll \alpha^n$ se montre en remarquant que $\frac{(n+1)^\beta}{n^\beta} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\beta$ qui tend vers 1 (puisque $\frac{1}{n} \to 0$). Par conséquent, il existe un rang N tel que pour $n \geq N$, $\frac{(n+1)^\beta}{n^\beta} \leq \frac{1+\alpha}{2} \in]1, \alpha[$. On a donc, pour $n \geq N$,

$$n^\beta = N^\beta \prod_{k=N}^{n-1} \frac{(k+1)^\beta}{k^\beta} \leq N^\beta \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^{n-N} = 2^{N+1} N^\beta (1+\alpha)^{-N} \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^n.$$

Le lemme 2.4.5 montre que $\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^n = o(\alpha^n)$.

Pour la relation $\ln^\gamma(n) \ll n^\beta$, on considère k un entier naturel. Pour $n \in [10^k, 10^{k+1}[$, on a $Ck \leq \ln(k) < C(k+1)$ et $10^{k\beta} \leq n^\beta < 10^{(k+1)\beta}$. On a donc $\frac{\ln^\gamma(n)}{n^\beta} \leq \frac{10^\beta}{C^\gamma} \frac{(10^\beta)^k}{k^\gamma}$. En faisant tendre k vers ∞, les relations déjà montrées donnent $\frac{(10^\beta)^k}{k^\gamma} \to 0$, ce qui achève la preuve. $\square$

On en déduit les comparaison suivantes :

Corollaire 2.4.6. *Soient α, β et γ trois réels avec $\alpha > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ par*

$$u_n = \alpha^n n^\beta \ln^\gamma(n).$$

Si $(\alpha, \beta, \gamma) < (1, 0, 0)$ pour l'ordre lexicographique(note 6)*, alors la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ converge vers 0. En revanche, si $(\alpha, \beta, \gamma) > (1, 0, 0)$, alors la suite tend vers ∞* (note 7).

2.5 Suites récurrentes

Définition 2.5.1. *On appelle suite récurrente (d'ordre 1) une suite réelle définie par une relation de récurrence de la forme*

$$u_0 \in I, \quad u_{n+1} = f(u_n), \tag{2.3}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans I.

On a un critère simple pour prouver la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Propriété 2.5.2. *Si f est croissante, alors la suite définie par la relation de récurrence* (2.3) *est monotone.*

Démonstration. Supposons $u_0 \leq u_1$. Nous allons montrer par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En effet, on pose $\mathcal{P}(n) =$ "$u_n \leq u_{n+1}$". Par hypothèse, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. On suppose donc $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire $u_n \leq u_{n+1}$. Par croissance de f, on obtient donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. On a donc montré $\mathcal{P}(n+1)$.

Le cas $u_0 \geq u_1$ se traite de la même manière. $\square$

(note 6). Autrement dit, si $\alpha < 1$, ou bien si $\alpha = 1$ et $\beta < 0$, ou encore si $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ et $\gamma < 0$. Cela revient à dire que l'on compare d'abord α avec 1, puis β avec 0, puis γ avec 0.

(note 7). Noter que si $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$, on a affaire à la suite constante $u_n = 1$.

Le cas f décroissante est un peu plus complexe.

Propriété 2.5.3. *Si f est décroissante, alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.*

De plus si $u_0 \leq u_1$, alors $u_{2n} \leq u_{2n+1}$ pour tout n, alors que si $u_0 \geq u_1$, on a $u_{2n} \geq u_{2n+1}$ pour tout n.

Démonstration. On remarque que si f est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante (puisque si $x \leq y$, alors $f(x) \geq f(y)$ d'où $f(f(x)) \leq f(f(y))$). Mais les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ peuvent être définies par les relations de récurrence

$$u_{2(n+1)} = (f \circ f)(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2(n+1)+1} = (f \circ f)(u_{2n+1}).$$

Par la propriété 2.5.2 appliquée à la fonction croissante $f \circ f$, les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc monotones.

Enfin, si $u_0 \leq u_1$, on montre par récurrence que $u_{2n} \leq u_{2n+1}$ pour tout n en appliquant deux fois la fonction f (et de même si $u_0 \geq u_1$). □

Si l'on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a un moyen d'identifier les limites possibles.

Propriété 2.5.4. *Si la fonction f est continue, et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par (2.3) converge vers une limite l, alors $l = f(l)$* (note 8).

Démonstration. Il suffit de passer à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, en utilisant la continuité de f. □

Théorème 2.5.5 (Théorème du point fixe de Picard)**.** *Si la fonction f vérifie la proposition*

$$\exists k < 1,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| < k|x - y|,$$

alors la fonction f a un unique point fixe vers lequel converge la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par (2.3).

Démonstration. Nous allons montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. En effet, on montre par récurrence que $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n|u_1 - u_0|$. On en déduit que pour $N \leq p \leq q$, on a

$$\begin{aligned}
|u_p - u_p| &\leq |u_p - u_{p+1}| + |u_{p+1} - u_{p+2}| + \ldots + |u_{q-1} - u_q| \\
&\leq \sum_{n=p}^{q-1} k^n |u_1 - u_0| \\
&= \frac{k^p - k^{q-1}}{1-k}|u_1 - u_0| \\
&\leq \frac{k^N}{1-k}|u_1 - u_0| \\
&\to_N 0,
\end{aligned}$$

ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et sa limite l vérifie

$$|f(l) - l| \leq |f(l) - f(u_n)| + |f(u_n) - u_n| + |u_n - l| \leq k|l - u_n| + |u_{n+1} - u_n| + |u_n - l| \to_n 0.$$

La limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc un point fixe de f. Enfin, si x et y sont deux points fixes de f, on a $|x - y| = |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Comme $k < 1$, cela signifie que $x = y$. □

(note 8). On dit que l est un *point fixe* de f.

Chapitre 3

Séries numériques

3.1 Premières définitions

Une série (réelle ou complexe) est une suite dont les termes sont écrits sous la forme $\sum_{n=0}^{N} u_n$, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite (réelle ou complexe). La série $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ sera notée de manière plus consise $\sum u_n$. Dans cette écriture, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelé *terme général* de la série $\sum u_n$, et les sommes $\sum_{n=0}^{N} u_n$ sont appelées *sommes partielles* de la série $\sum u_n$. Remarquer que *toute* suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être mise sous forme de série, en utilisant l'écriture

$$v_N = \sum_{n=0}^{N} v_n - v_{n-1},$$

où l'on a posé par convention $v_{-1} = 0$.

Définition 3.1.1. *Si la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ admet une limite, on dit que la série $\sum u_n$ est* convergente. *La limite de $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est appelée* somme *de la série $\sum u_n$ et est* notée $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. *Pour une série convergente $\sum u_n$, les termes de la suite $(\sum_{N=n}^{\infty} u_n)_{N\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\sum_{n=N}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{n=0}^{N-1} u_n$$

sont appelés restes *de la série.*

Il faut être bien conscient du fait que la notation $\sum_{n=0}^{\infty}$ contient une *limite*, et est donc à manier avec précaution. Notamment, on prendra garde a ne pas écrire le reste d'une série, et a ne pas parler de la somme d'une série avant de vérifier la convergence !

Les propriétés sur les suites convergentes donnent la propriété suivante.

Propriété 3.1.2. *Une combinaison linéaire de deux séries convergentes est convergente, et on a l'identité, pour deux scalaires λ et μ,*

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n).$$

Autrement dit, l'ensemble des séries convergentes constitue un espace vectoriel, et l'application qui à une série associe sa limite est linéaire.

Propriété 3.1.3. *Les restes d'une série convergente tendent vers 0.*

Démonstration. Il suffit de passer à la limite dans l'égalité

$$\sum_{n=N}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{n=0}^{N-1} u_n,$$

le membre de droite étant convergent. □

Propriété 3.1.4. *Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.*

Démonstration. En passant à la limite dans l'égalité

$$u_N = \sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{N-1} u_n,$$

(licite car le membre de droite converge) on obtient

$$\lim_{N\to\infty} u_N = \sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n = 0.$$

□

La réciproque de cette propriété est *fausse*, comme on peut le voir sur l'exemple de la série $\sum \frac{1}{n}$, dite *série harmonique*. En effet, le terme général de cette série tend vers 0, alors que la série n'est pas convergente, comme nous allons le voir.

On sait qu'une suite réelle converge si et seulement si elle est de Cauchy. Il est donc intéressant de caractériser les séries qui constituent des suites de Cauchy.

Propriété 3.1.5. *Une série $\sum u_n$ constitue une suite de Cauchy si et seulement les sommes $\sum_{n=p}^{q} u_n$ tendent vers 0 quand p et q tendent vers l'infini, c'est-à-dire qu'elle vérifient la proposition*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ (N \le p \le q) \Rightarrow \left| \sum_{n=p}^{q} u_n \right| \le \varepsilon.$$

Démonstration. C'est une simple réécriture de la définition d'une suite de Cauchy. En effet, on a l'égalité $\sum_{n=0}^{q} u_n - \sum_{n=0}^{p-1} u_n = \sum_{n=p}^{q} u_n$. □

La propriété 3.1.5 nous permet de montrer que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge. En effet, on a

$$\sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{n} \ge \sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{N+1}{2N}.$$

Or $\frac{N+1}{2N}$ converge vers 1/2. La série harmonique ne vérifie donc pas le critère de Cauchy : elle diverge.

Définition 3.1.6. *Si la série $\sum |u_n|$ est convergente, on dit que la série $\sum u_n$ est* absolument convergente.

La propriété suivante permet de réduire l'étude de la convergence de nombreuses séries à l'étude des séries à termes *positifs*.

Propriété 3.1.7. *Une série absolument convergente est convergente et vérifie l'inégalité*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| .$$

Démonstration. Supposons que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente. Montrons que la série $\sum u_n$ constitue une suite de Cauchy.

Par l'inégalité triangulaire, on a, pour $p \leq q$,

$$\left|\sum_{n=p}^{q} u_n\right| \leq \sum_{n=p}^{q} |u_n|.$$

Comme la série $\sum |u_n|$ converge, elle satisfait le critère de Cauchy et on a

$$\sum_{n=p}^{q} |u_n| \underset{p,q\to\infty}{\to} 0.$$

Pour montrer l'inégalité, il suffit de remarquer que $\left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right|$ converge (note 1) vers $|\sum_{n=0}^{\infty} u_n|$, et de passer à la limite dans l'inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |u_n| .$$

□

3.2 Séries à termes positifs

Dans cette partie, on va donner des critères de convergence pour les séries à termes positifs. L'intérêt est que la propriété 3.1.7 permet d'en déduire des critères de convergence pour des suites de signe quelconques (ou à valeur complexes).

Propriété 3.2.1. *Soit $\sum u_n$ une série dont le terme général est* positif. *Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si ses sommes partielles sont bornées. Dans ce cas on a alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n = \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

(note 1). En effet, l'inégalité $\left||v_n| - |l|\right| \leq |v_n - l|$ montre que si $v_n \to l$, alors $|v_n| \to |l|$

Démonstration. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante. Elle converge alors si et seulement si elle est bornée, et dans ce cas sa limite est égale à sa borne supérieure. □

Propriété 3.2.2. *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à terme général positif telles que $u_n \leq v_n$.*
- *Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.*
- *Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.*

Démonstration. Comme $u_n \leq v_n$, on a $\sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{N} v_n$. Si $\sum v_n$ converge, on a

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{N} v_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

Par la propriété 3.2.1, cela montre que $\sum u_n$ converge, ses sommes partielles étant bornées. L'autre implication est la contraposée de la première. □

Passons maintenant à l'étude de certaines séries particulières.

La convergence de la série géométrique $\sum a^n$ se montre de manière très simple, et cette série va nous donner des critères de convergence pour d'autres séries :

Propriété 3.2.3. *Soit a un nombre complexe. La série $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$. On a alors dans ce cas*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Démonstration. Premièrement, on écarte le cas $a = 1$, pour lequel les sommes partielles valent $\sum_{n=0}^{N} 1 = N + 1$, la série étant alors divergente.

Dans le cas $a \neq 1$, on remarque que $(1-a)\sum_{n=0}^{N} a^n = \sum_{n=0}^{N} a^n - \sum_{n=1}^{N+1} a^n = 1 - a^{N+1}$. On a donc, en divisant par $1 - a$ (qui est non-nul),

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1 - a^{N+1}}{1-a}.$$

La série converge donc si et seulement si a^{N+1} a une limite quand N tend vers l'infini, ce qui revient bien à $|a| < 1$. □

On remarque que la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la seule (à multiplication par une constante près) à vérifier l'égalité $\frac{u_{n+1}}{u_n} = a$. On peut en fait obtenir un critère de convergence proche de celui de la série géométrique pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge.

Théorème 3.2.4 (Critère de d'Alembert)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers un réel l.*
- *si $l > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge ;*
- *si $l < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.*

Ce critère ne permet toutefois pas de conclure dans le cas $l = 1$ comme on peut le voir sur les exemples $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$. En effet, la première série diverge et la deuxième converge (note 2), alors que les rapports de termes consécutifs vérifient

$$\frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \to 1, \quad \text{et} \quad \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}\frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1.$$

Démonstration. Plaçons nous d'abord dans le cas $l < 1$. Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers une limite l strictement inférieure à 1, si $l < 1 - \varepsilon < 1$, alors il existe un certain rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \varepsilon$. On peut donc écrire

$$\frac{u_N}{u_{n_0}} = \prod_{n=n_0}^{N-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \prod_{n=n_0}^{N-1} (1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^{N-n_0}.$$

On a donc $u_N \leq \frac{u_{n_0}}{(1-\varepsilon)^{n_0}}(1-\varepsilon)^N$ dès que $N > n_0$. Comme la série $\sum(1-\varepsilon)^N$ converge, alors $\sum u_N$ converge aussi, puisqu'elles sont à termes positifs.

Le cas $l > 1$ se traite de manière similaire : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers une limite l strictement suérieure à 1, donc pour $1 < 1 + \varepsilon < l$ il existe un rang n_0 tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 + \varepsilon$ si $n \geq n_0$. On écrire

$$\frac{u_N}{u_{n_0}} = \prod_{n=n_0}^{N-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \prod_{n=n_0}^{N-1} (1+\varepsilon) = (1+\varepsilon)^{N-n_0},$$

ce qui donne $u_N \geq \frac{u_{n_0}}{(1+\varepsilon)^{n_0}}(1+\varepsilon)^N$ dès que $N > n_0$. Comme la série $\sum(1+\varepsilon)^N$ diverge, $\sum u_N$ diverge aussi. □

En fait, on peut énonce un résultat un peu moins restrictif en utilisant la notion de limites inférieures et supérieures en lieu et place de limites, comme dans le théorème suivant :

Théorème 3.2.5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Si*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$

alors la série $\sum u_n$ converge. Si

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$$

alors la série diverge.

La preuve du théorème 3.2.5 se fait alors exactement comme celle du théorème 3.2.4, en utilisant la propriété suivante des limites supérieures (et inférieures) :

Propriété 3.2.6. *Si $\limsup_{n\to\infty} u_n = l < \infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que si $n \geq n_0$ on a $u_n \leq l + \varepsilon$.*
Si $\liminf_{n\to\infty} u_n = l > -\infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que si $n \geq n_0$ on a $u_n \geq l - \varepsilon$.

Démonstration. Posons $l = \limsup_n u_n$. On a $\limsup_n u_n = \inf_{n\geq 0} \sup_{k\geq n} u_k < l+\varepsilon$, donc par définition de la borne inférieure, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{k\geq n_0} u_k < l + \varepsilon$, ce qui donne le résultat. □

(note 2). Voir propriété 3.2.10

On peut énoncer un autre critère de convergence en se basant sur le fait que la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la seule à vérifier $(u_n)^{1/n} = a$. On peut en fait étendre le critère de convergence des séries géométriques aux séries dont le terme général u_n est tel que $\left(u_n^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Propriété 3.2.7 (Règle de Cauchy)**.** *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que la suite $\left(u_n^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l.*
- *Si $l < 1$, alors la série converge ;*
- *Si $l > 1$, alors la série diverge.*

Démonstration.
- Si $l < 1$, pour un ε tel que $l < 1-\varepsilon < 1$, il existe un rang n_0 tel que, si $n \geq n_0$, on a $u_n^{1/n} \leq 1-\varepsilon$. On a donc, pour $n \geq n_0$, l'inégalité $u_n \leq (1-\varepsilon)^n$. Comme la série géométrique de raison $1-\varepsilon$ converge, il en est de même de $\sum u_n$.
- Si $l > 1$, alors il existe un rang n_0 tel que $u_n^{1/n} > 1$ dès que $n \geq n_0$. On a donc pour $n \geq 0$ $u_n \geq 1$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, et la série $\sum u_n$ est donc divergente.

□

On peut affaiblir les hypothèses de ce théorème en remplaçant la limite par une limite supérieure :

Propriété 3.2.8. *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.*
- *Si* $\limsup_{n\to\infty} u_n^{1/n} < 1$*, alors la série converge ;*
- *Si* $\limsup_{n\to\infty} u_n^{1/n} > 1$*, alors la série diverge.*

Démonstration. La preuve reste essentiellement la même, on doit juste remarquer que dans le cas où $\limsup_{n\to\infty} u_n^{1/n} > 1$, on a $u_n^{1/n} > 1$ pour une infinité de valeurs de n (plutôt que pour tout n assez grand). □

De même que pour la règle de d'Alembert, on ne peut pas conclure immédiatement dans le cas ou la limite supérieure vaut 1, comme on peut le voir sur les exemples des séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$.

Il existe des cas pour lesquels la règle de Cauchy permet de conclure, mais pas celle de d'Alembert. Par exemple, si on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ est pair ;} \\ \frac{1}{3^n} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

on remarque que

$$u_n^{1/n} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{3} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{3^{n+1}}{2^n} = 3\left(\frac{3}{2}\right)^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2^{n+1}}{3^n} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On a donc $\limsup_{n\to\infty} u_n^{1/n} = 1/2 < 1$, alors que $\limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$. Par conséquent, la règle de Cauchy permet de conclure, mais pas celle de d'Alembert. La raison est que la règle de Cauchy considère les valeurs de chaque u_n dans l'absolu, alors que la règle de d'Alembert ne considère que les accroissements relatifs entre deux termes consécutifs, qui peuvent être grand alors que les termes de la séries sont petits.

On a en fait l'inégalité suivante, qui montre que la règle de Cauchy est plus fine que la règle de d'Alembert.

Propriété 3.2.9. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Alors on a*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \liminf_{n\to\infty} u_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} u_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Démonstration. Montrons $\limsup_{n\to\infty} u_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. On pose $l = \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un indice n_0 tel que si $n \geq n_0$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon$. On a donc, pour $N \geq n_0$,

$$\frac{u_N}{u_{n_0}} = \prod_{n=n_0}^{N-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \prod_{n=n_0}^{N-1} (l+\varepsilon) = (l+\varepsilon)^{N-n_0}.$$

On peut donc écrire,

$$u_N^{1/N} = \left(\frac{u_{n_0}}{(l+\varepsilon)^{n_0}}\right)^{1/N} (l+\varepsilon).$$

En passant à la limite supérieure, on trouve

$$\limsup_{N\to\infty} u_N^{1/N} \leq (l+\varepsilon).$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\limsup_{N\to\infty} u_N^{1/N} \leq l = \limsup_{N\to\infty} \frac{u_{N+1}}{u_N}$.

On a donc montré la troisième inégalité. La première se montre de la même manière, et la deuxième est évidente. □

On veut maintenant pouvoir déterminer le comportement asympotiques de séries pour lesquelles les règles de Cauchy et d'Alembert ne s'appliquent pas. L'exemple typique de telles séries étant les séries puissances (ou *séries de Riemann*) du type $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. On a un critère très simple pour la convergence de ces séries.

Propriété 3.2.10. *La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration. On sait que si $\alpha < \beta$, alors $\frac{1}{n^\beta} \leq \frac{1}{n^\alpha}$. Par conséquent, il suffit de montrer la divergence de la série $\sum \frac{1}{n}$, et la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ dès que $\alpha > 1$.

Le cas $\alpha = 1$ a déjà été traité, il reste donc a traiter le cas $\alpha > 1$. On écrit

$$\sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{(2^N)^\alpha} = \frac{2^{N+1}-2^N}{(2^\alpha)^N} = \frac{1}{(2^{\alpha-1})^N}.$$

Soit n un entier naturel, et N l'entier tel que $2^N < n < 2^{N+1} - 1$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{q=0}^{N} \sum_{k=2^q}^{2^{q+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{q=0}^{N} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^q} \leq \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^q} < \infty.$$

La derière série converge car $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$. Les sommes partielles de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont donc bornées. Comme la série est à termes positifs, on en déduit qu'elle converge. □

Remarquons que la suite $\frac{1}{n^\alpha}$ vérifie

$$\begin{aligned}\frac{1/(n+1)^\alpha}{1/n^\alpha} = (1+1/n)^{-\alpha} &= e^{-\alpha \ln(1+1/n)} \\ &= e^{-\alpha(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} \\ &= 1-\alpha\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)+o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= 1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

On va en déduire un critère de convergence pour toutes les séries dont le terme général admet un développement limité semblable.

Propriété 3.2.11 (Règle de Duhamel)**.** *Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le développement suivant en $n \to \infty$:*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Alors :
- *si $\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ converge ;*
- *si $\alpha < 1$, la série $\sum u_n$ diverge.*

Démonstration. Supposons $1 < \alpha$. On choisit $1 < 1+\varepsilon < \alpha$. On a

$$\begin{aligned}n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}-\frac{1/(n+1)^{1+\varepsilon}}{1/n^{1+\varepsilon}}\right) &= n\left(1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-n\left(1-\frac{1+\varepsilon}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= (1+\varepsilon-\alpha)+o(1).\end{aligned}$$

Cela signifie que la suite de terme général $n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}-\frac{1/(n+1)^{1+\varepsilon}}{1/n^{1+\varepsilon}}\right)$ converge vers $1+\varepsilon-\alpha$, qui est strictement négatif. Par conséquent, cette suite est strictement négative à partir d'un certain rang n_0. On a donc

$$\frac{u_N}{u_{n_0}} = \prod_{n=n_0}^{N-1}\frac{u_{n+1}}{u_n} < \prod_{n=n_0}^{N-1}\frac{1/(n+1)^{1+\varepsilon}}{1/n^{1+\varepsilon}} = \frac{n_0^{1+\varepsilon}}{N^{1+\varepsilon}}.$$

À partir du rang n_0, on a donc $u_N \le \frac{u_{n_0} n_0^{1+\varepsilon}}{N^{1+\varepsilon}}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ converge, alors $\sum u_n$ aussi.
La preuve pour le cas $\alpha < 1$ est similaire. □

Quand on sait comparer les termes généraux de deux séries, on peut en déduire des comparaisons entre les sommes partielles ou les restes des séries, d'après la propriété suivante.

Propriété 3.2.12. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites positives.*
- *Supposons que la série $\sum u_n$ diverge*
  - *Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum v_n$ diverge et $\sum_{n=0}^N u_n \sim \sum_{n=0}^N v_n$*
  - *Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum v_n$ diverge et $\sum_{n=0}^N u_n = o\left(\sum_{n=0}^N v_n\right)$;*
  - *Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum v_n$ diverge et $\sum_{n=0}^N u_n = O\left(\sum_{n=0}^N v_n\right)$.*

- *Supposons que la série* $\sum v_n$ *converge.*
  - *Si* $u_n \sim v_n$, *alors* $\sum u_n$ *converge et* $\sum_{n=N}^{\infty} u_n \sim \sum_{n=N}^{\infty} v_n$
  - *Si* $u_n = o(v_n)$, *alors* $\sum u_n$ *converge et* $\sum_{n=N}^{\infty} u_n = o\left(\sum_{n=N}^{\infty} v_n\right)$ *;*
  - *Si* $u_n = O(v_n)$, *alors* $\sum u_n$ *converge et* $\sum_{n=N}^{\infty} u_n = O\left(\sum_{n=N}^{\infty} v_n\right)$.

Démonstration. On fait seulement la preuve pour le premier cas, les cinq autres étant semblables (ou plus simples). Comme $u_n \sim v_n$, pour tout $1 > \varepsilon > 0$ il existe un n_0 tel que si $n \geq n_0$, on a

$$(1-\varepsilon)v_n < u_n < (1+\varepsilon)v_n,$$

ce qui montre que $\sum v_n$ diverge, puisque $\sum u_n$ diverge.

Montrons maintenant l'équivalence des sommes partielles. On a

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + (1-\varepsilon)\sum_{n=n_0}^{N} v_n < \sum_{n=0}^{N} u_n < \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + (1+\varepsilon)\sum_{n=n_0}^{N} v_n.$$

On en déduit l'encadrement

$$\frac{\sum_{n=0}^{n_0-1} u_n}{\sum_{n=0}^{N} v_n} + (1-\varepsilon)\frac{\sum_{n=n_0}^{N} v_n}{\sum_{n=0}^{N} v_n} < \frac{\sum_{n=0}^{N} u_n}{\sum_{n=0}^{N} v_n} < \frac{\sum_{n=0}^{n_0-1} u_n}{\sum_{n=0}^{N} v_n} + (1+\varepsilon)\frac{\sum_{n=n_0}^{N} v_n}{\sum_{n=0}^{N} v_n}.$$

Or, puisque la série $\sum v_n$ diverge, la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ tend vers ∞, ce qui implique que $\frac{\sum_{n=0}^{n_0-1} u_n}{\sum_{n=0}^{N} v_n}$ tend vers 0 et $\frac{\sum_{n=n_0}^{N} v_n}{\sum_{n=0}^{N} v_n}$ vers 1. On en conclut

$$1-\varepsilon < \liminf_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N} u_n}{\sum_{n=0}^{N} v_n} \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N} u_n}{\sum_{n=0}^{N} v_n} < 1+\varepsilon.$$

Ces inégalités étant vraies pour tout ε, on en déduit que les limites supérieure et inférieure valent 1, et donc que $\sum_{n=0}^{N} u_n \sim \sum_{n=0}^{N} v_n$ □

Dans la propriété 3.2.12, il est important que les deux suites soient positives (ou au moins qu'elles soient de signe constant à partir d'un certain rang). En effet, on peut construire le contre-exemple suivant :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \ v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

La série $\sum u_n$, étant alternée, converge, alors que la série $\sum v_n$ diverge à cause du terme $\frac{1}{n}$. Les deux suites sont pourtant équivalentes.

On énonce maintent le critère de comparaison séries/intégrales, qui permet de ramener l'étude de certaines séries à l'étude d'intégrales.

Théorème 3.2.13. *Soit* $f : [0,\infty[\to [0,\infty[$ *une fonction continue décroissante. Alors la série*

$$\sum \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt \right)$$

converge.

De ce théorème, on déduit que l'étude de la série $\sum f(n)$ peut se ramener à celle de la primitive de f :

Corollaire 3.2.14. *Soit f vérifiant les hypothèses du théorème 3.2.13. Alors la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la fonction f est intégrable sur $[0,\infty[$. De plus,*

– *dans le cas où $\sum f(n)$ converge, on a*

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq \int_N^{\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{n=N}^{\infty} f(n) \ ;$$

– *dans le cas où $\sum f(n)$ diverge, on a le développement*

$$\sum_{n=0}^{N} f(n) = \int_0^N f(t)\,dt + \sum_{n=0}^{\infty}\left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt\right) + o(1). \tag{3.1}$$

Remarquer que dans le développement (3.1), le premier terme tend vers ∞, alors que le second est constant.

Preuve du théorème 3.2.13. Comme la fonction f est décroissante, on peut écrire

$$f(n+1) \leq f(t) \leq f(n) \text{ si } t \in [n, n+1],$$

d'où on déduit

$$0 \leq f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq f(n) - f(n+1).$$

En sommant de $n = 0$ à $n = N$, on obtient les inégalités

$$0 \leq \sum_{n=0}^{N}\left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t\right) \leq \sum_{n=0}^{N} f(n) - f(n+1) = f(0) - f(N+1).$$

Comme la fonction f est décroissante et minorée, elle converge vers une limite en ∞. On a donc

$$\sum_{n=0}^{N}\left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t\right) \leq f(0) - \lim_{x\to\infty} f(x).$$

La série $\sum \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t\right)$ est donc une série à terme général positif dont les sommes partielles sont bornées. Il s'agit donc d'une série convergente. □

On peut par exemple déduire du corollaire 3.2.14 le développement asymptotique suivant :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1),$$

où γ est une constante (dont les permières décimales sont 0.57721), appelée *constante d'Euler* (ou *d'Euler-Mascheroni*). On sait assez peu de chose sur γ, notamment on ignore encore à ce jour si elle est rationnelle ou non.

3.3 Séries à termes complexes

Propriété 3.3.1 (Critère des séries alternées)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante et que deux termes consécutifs soient de signe opposés. Alors la série $\sum u_n$ est convergente. De plus, si $u_N \leq 0$, on a*

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{N+1} u_n.$$

On a donc une estimation de la vitesse de convergence :

$$|u_{N+1}| - |u_{N+2}| \leq \left|\sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq |u_{N+1}|.$$

Démonstration. Quitte à remplacer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut supposer que u_n est du signe de $(-1)^n$.

Considérons les deux suites $(v_N)_{N\in\mathbb{N}}$ et $(w_N)_{N\in\mathbb{N}}$ définies par

$$v_N = \sum_{N=0}^{2N+1} u_n \quad \text{et} \quad w_N = \sum_{n=0}^{2N} u_n.$$

On va montrer que ces deux suites sont adjacentes, de sorte qu'elles convergent vers la même limite, ce qui permettra de conclure que la série $\sum u_n$ converge.

Tout d'abord, on a $w_N = v_N + u_{2N} \geq v_N$, puisque les termes dela suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'indices pairs ont été supposés positifs. Ensuite, $v_{N+1} - v_N = u_{2N+2} + u_{2N+3} = (|u_{2N+2}| - |u_{2N+3}|) \leq 0$ (puisque la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît), de sorte que $(v_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante. De même $(w_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Enfin on a $|v_N - w_N| = |u_{2N+1}|$ qui tend vers 0. On a bien affaire à des suites adjacentes. □

Exemple : la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente quel que soit $\alpha > 0$. De plus, on remarque qu'elle n'est pas absolument convergente si $0 < \alpha \leq 1$.

On va montrer un résultat plus général que le théorème des séries alternées. On va tout d'abord montrer la propriété suivante, qui est un analogue discret de la formule d'intégration par parties.

Propriété 3.3.2 (Transformation d'Abel)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs complexes. On pose*

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et} \quad v_n = V_{n+1} - V_n.$$

On a alors, pour tout entier $N \geq 1$,

$$\sum_{n=0}^{N} u_n V_n = -\sum_{n=0}^{N-1} U_n v_n + U_N V_N.$$

Démonstration. On écrit :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} u_n V_n = \sum_{n=1}^{N} (U_n - U_{n-1}) V_n + U_0 V_0 &= \sum_{n=1}^{N} U_n V_n - \sum_{n=1}^{N} U_{n-1} V_n + U_0 V_0 \\
&= \sum_{n=0}^{N} U_n V_n - \sum_{n=0}^{N-1} U_n V_{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} U_n (V_n - V_{n+1}) + U_N V_N \\
&= -\sum_{n=0}^{N-1} U_n v_n + U_N V_N.
\end{aligned}$$

□

Cette écriture permet de montrer le résultat suivant.

Propriété 3.3.3. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs complexes. Si les sommes partielles de la série $\sum u_n$ constituent une suite bornée et si la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroît vers 0, alors la série $\sum u_n V_n$ converge.*

Démonstration. On reprend les notations de la propriété 3.3.2. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par une constante notée C. On a alors

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=p}^{q} u_n V_n \right| &= \left| \sum_{n=0}^{q} u_n V_n - \sum_{n=0}^{p-1} u_n V_n \right| \\
&= \left| - \sum_{n=0}^{q-1} U_n v_n + U_q V_q + \sum_{n=0}^{p-2} U_n v_n - U_{p-1} V_{p-1} \right| \\
&\leq \left| \sum_{n=p-1}^{q-1} U_n v_n \right| + |U_q V_q| + |U_{p-1} V_{p-1}| \\
&\leq C \left(\sum_{n=p-1}^{q-1} |v_n| + |V_q| + |V_{p-1}| \right).
\end{aligned}$$

Or, comme la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît, on a $|v_n| = |V_{n+1} - V_n| = V_n - V_{n+1}$. La somme du membre de droite est donc une somme télescopique, et on obtient

$$\left| \sum_{n=p}^{q} u_n V_n \right| \leq C \left(\left(\sum_{n=p}^{q-1} V_n - V_{n+1} \right) + V_q + V_{p-1} \right) = C(V_p + V_{p-1}).$$

Le membre de droite tend vers 0 par hypothèse quand p et q tendent vers l'infini. La série $\sum u_n V_n$ satisfait donc le critère de Cauchy. □

Un corollaire important de ce théorème est le suivant :

Corollaire 3.3.4. *Pour toute suite décroissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et tout réel θ non multiple de 2π, les séries*

$$\sum e^{in\theta}u_n, \ \sum \cos(n\theta)u_n \ \text{ et } \ \sum \sin(n\theta)u_n$$

convergent.

Démonstration. Comme on a

$$\sum \cos(n\theta)u_n = \sum \left(e^{in\theta}\frac{u_n}{2} + e^{-in\theta}\frac{u_n}{2}\right) \text{ et } \sum \sin(n\theta)u_n = \sum \left(e^{in\theta}\frac{u_n}{2} - e^{-in\theta}\frac{u_n}{2}\right),$$

il suffit d'étudier la série $\sum e^{in\theta}u_n$. Cette série rentre bien dans le cadre de la propriété 3.3.3 puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroît vers 0, et les sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} e^{in\theta}$ vérifient (puisque comme $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a $e^{i\theta} \neq 1$)

$$\left|\sum_{n=0}^{N} e^{in\theta}\right| = \left|\frac{1-e^{i(N+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right| \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}.$$

□

3.4 Séries doubles

Propriété 3.4.1. *Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs indexée par les couples $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. Si pour tout entier naturel m la série $\sum_n u_{n,m}$ est convergente et si la série $\sum_m (\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m})$ converge, alors, pour tout n, les séries $\sum_m u_{n,m}$ convergent, de même que la série $\sum_n (\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m})$. De plus, on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}\right)$$

Démonstration. On a la majoration

$$\sum_{m=0}^{M} u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_m u_{n,m}$ sont donc majorées, de sorte que cette série converge.

Ensuite, on a

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} u_{n,m} = \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}.$$

En passant à la limite $M \to \infty$ (ce qui est licite puisque N est fini), on trouve

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m},$$

de sorte que les sommes partielles de la série $\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m}$ sont bornées. Comme cette série est à termes positifs, on en déduit qu'elle converge. En passant à la limite dans la dernière inégalité, on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}.$$

Par symétries entre les indices n et m, l'égalité inverse est également vraie, et on en déduit l'égalité des sommes. □

De même, pour une famille de nombres complexes, on a la propriété :

Propriété 3.4.2. *Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres complexes indexée par les couples $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. Si pour tout naturel m la série $\sum_n |u_{n,m}|$ est convergente et si la série $\sum\left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,m}|\right)$ converge, alors les séries $\sum_m |u_{n,m}|$ et $\sum\left(\sum_{m=0}^{\infty} |u_{n,m}|\right)$ convergent et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}\right)$$

Démonstration. La première partie de l'énoncé est une simple application de la propriété 3.4.1. Pour montrer l'égalité des sommes, on écrit

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m}\right) - \sum_{m=0}^{N}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}\right)\right| &= \left|\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{m=N+1}^{\infty} u_{n,m}\right) - \sum_{m=0}^{N}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} u_{n,m}\right)\right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{m=N+1}^{\infty} |u_{n,m}|\right) + \sum_{m=0}^{N}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |u_{n,m}|\right) \\
&= \sum_{m=N+1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{N} |u_{n,m}|\right) + \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{N} |u_{n,m}|\right) \\
&\leq \sum_{m=N+1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,m}|\right) + \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} |u_{n,m}|\right).
\end{aligned}$$

Le membre de droite tend bien vers 0, étant le reste d'une série convergente. □

On va maintenant énoncer une propriété du *produit de Cauchy*, ou *produit de convolution* de deux séries, défini de la manière suivante.

Définition 3.4.3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On définit leur* produit de Cauchy $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par la formule*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Le produit de Cauchy est commutatif, puisqu'un changement de variable $q = n - k$ dans la somme précédente donne

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{q=0}^{n} u_{n-q} v_q.$$

Le produit de Cauchy se comporte bien vis à vis des séries absolument convergentes.

Propriété 3.4.4. *Si les séries à termes complexes* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont absolument convergentes, alors il en est de même de la série* $\sum w_n$*, où* $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$*. De plus on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right).$$

Démonstration. On a

$$\sum_{n=0}^{N} |w_n| = \sum_{n=0}^{N}\left|\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right| \leq \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} |u_k||v_{n-k}|.$$

On peut intervertir les deux sommes en écrivant

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} |u_k||v_{n-k}| = \sum_{k=0}^{N}\sum_{k=n}^{N} |u_k||v_{n-k}| = \sum_{k=0}^{N}\sum_{q=0}^{N-k} |u_k||v_q|,$$

la dernière égalité s'obtenant par le changement de variable $q = n - k$. On a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} |w_n| \leq \sum_{k=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} |u_k||v_q| = \left(\sum_{k=0}^{N} |u_k|\right)\left(\sum_{q=0}^{N} |v_q|\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} |v_q|\right),$$

ce qui montre que la série $\sum w_n$ est absolument convergente, les sommes partielles des modules étant bornées. Pour montrer que la somme du produit de Cauchy vaut le produit des sommes, on écrit

$$\left|\sum_{n=0}^{2N} w_n - \left(\sum_{k=0}^{N} u_k\right)\left(\sum_{q=0}^{N} v_q\right)\right| = \left|\sum_{n=0}^{2N}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} - \left(\sum_{k=0}^{N} u_k\right)\left(\sum_{q=0}^{N} v_q\right)\right|.$$

En intervertissant les sommes et en faisant le changement de variables $q = n - k$, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{2N}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} - \left(\sum_{k=0}^{N} u_k\right)\left(\sum_{q=0}^{N} v_q\right)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{2N}\sum_{n=k}^{2N} u_k v_{n-k} - \sum_{k=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} u_k v_q\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{2N}\sum_{q=0}^{2N-k} u_k v_q - \sum_{q=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} u_k v_q\right|.\end{aligned}$$

On peut alors écrire,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{2N}\sum_{q=0}^{2N-k} u_k v_q - \sum_{q=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} u_k v_q\right| &= \left|\sum_{k=N+1}^{2N}\sum_{q=0}^{2N-k} u_k v_q + \sum_{q=N+1}^{2N}\sum_{k=0}^{2N-q} u_k v_q\right| \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{2N}\sum_{q=0}^{2N-k} |u_k||v_q| + \sum_{q=N+1}^{2N}\sum_{k=0}^{2N-q} |u_k||v_q| \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{2N}\sum_{q=0}^{\infty} |u_k||v_q| + \sum_{q=N+1}^{2N}\sum_{k=0}^{\infty} |u_k||v_q| \\ &= \left(\sum_{k=N+1}^{2N} |u_k|\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} |v_q|\right) + \left(\sum_{q=N+1}^{2N} |v_q|\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|\right).\end{aligned}$$

Les restes d'une série convergente tendent vers zéro, par conséquent le membre de droite tend vers 0, ce qui achève la démonstration. $\square$

Chapitre 4

Fonctions de la variable réelle

4.1 Étude locale des fonctions

On va utiliser la terminologie suivante, qui sera utile par la suite.

Définition 4.1.1. *Un* voisinage *d'un réel a est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle non-trivial centré en a, c'est à dire un intervalle de la forme $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, pour un certain $\varepsilon > 0$.*

Par exemple, les ensembles $]-1, \infty[$, $\mathbb{R}$, ou $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n - 1/3, n + 1/3]$ sont des voisinages de 0. En revanche, les ensemble $[0,1]$, $[0, \infty[$ ou $\mathbb{Q}$ n'en sont pas.

Définition 4.1.2. *On dit qu'une fonction réelle f définie sur un voisinage I d'un point a* a pour limite en a la valeur l *si elle vérifie la proposition*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ \ (|x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon).$$

Si la fonction f admet l comme limite au point a, on note

$$\lim_{x \to a} f(x) = l, \ \ \textit{ou encore}\ f(x) \underset{x \to a}{\to} l.$$

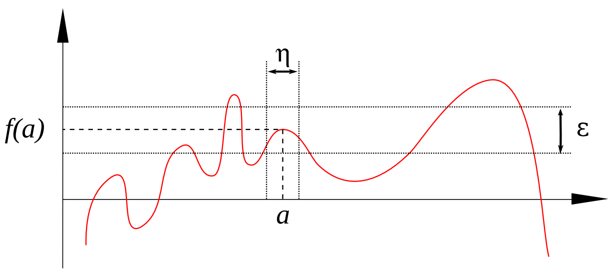

FIGURE 4.1 – Continuité d'une fonction.

On peut également parler des limites à gauche et à droite d'une fonction.

Définition 4.1.3. *On dit qu'une fonction f définie au voisinage d'un point a* admet l comme limite à gauche en a *si elle vérifie la proposition*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ (x \in]a-\eta, a[) \Rightarrow (|f(x) - l| \leq \varepsilon).$$

On peut définir de même la notion de limite à droite.
Si f admet l comme limite à gauche (resp. à droite) en a, on note

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l \ \textit{ou} \ \lim_{x \stackrel{<}{\to} a} f(x) = l \ (\textit{resp.} \ \lim_{x \to a^+} f(x) = l \ \textit{ou} \ \lim_{x \stackrel{>}{\to} a} f(x) = l).$$

L'opération de passage à la limite peut être manipulée en utilisant les propriétés suivantes :

Propriété 4.1.4. *Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage d'un point a telle que pour tout $x \neq a$ dans un voisinage de a on ait*

$$f(x) \leq g(x).$$

Si les deux fonctions admettent une limite en a, alors ces limites vérifient

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

La même inégalité est vraie pour les limites à gauche ou à droite.

Démonstration. On va montrer la contraposée : supposons que l'on ait l'inégalité stricte

$$\lim_{x \to a} f(x) > \lim_{x \to a} g(x).$$

Pour simplifier, on note $l_f = \lim_{x \to a} f(x)$ et $l_g = \lim_{x \to a} g(x)$. On pose $\varepsilon = (l_f - l_g)/2 > 0$. Soit η tel que pour x dans $]a-\eta, a+\eta[$ on ait $|f(x) - l_f| \leq \varepsilon$ et $|g(x) - l_g| \leq \varepsilon$ (note 1). Alors, pour x dans $]a-\eta, a+\eta[$, on a

$$f(x) > l_f - \varepsilon = (l_f + l_g)/2 = l_g + \varepsilon > g(x).$$

La propriété est démontrée. □

Il est important de noter que l'on *ne peut pas* conclure à une inégalité stricte entre les limites si on a seulement inégalité stricte entre les fonctions.

Propriété 4.1.5 ("Théorème des gendarmes")**.** *Soient f, g et h trois fonctions définies sur un voisinage d'un point a telle que pour tout x dans un voisinage de a on ait*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Si f et h ont une limite en a et si $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x)$*, alors g admet également une limite en a et*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x).$$

(note 1). On peut choisir le *même* η pour f et g de la manière suivante : on sait qu'il existe des nombres η_f et η_g qui satisfont la propriété respectivement pour f et g. On vérifie alors que $\eta = \min(\eta_f, \eta_g)$ convient pour les deux fonctions.

Démonstration. Soit ε un réel positif. Notons $l = f(a) = h(a)$ la limite commune en a des deux fonctions f et h. On considère η tel que si $|x-a| \leq \eta$ on ait $|f(x)-l| \leq \varepsilon$ et $|h(x)-l| \leq \varepsilon$.

Si $|x-a| \leq \eta$, on a alors

$$l - \varepsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq l + \varepsilon,$$

soit encore $|g(x) - l| \leq \varepsilon$. La fonction g a donc une limite en a, égale aux limites de f et h. □

Définition 4.1.6. *On dit qu'une fonction f définie au voisinage d'un point a* est continue en a *si elle admet une limite en a.*
Si la fonction f de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est continue en tout point a de I, on dit qu'elle est continue sur I*, ou tout simplement qu'elle est* continue.

Si f admet une limite à gauche en a et que $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$*, on dit que f est* continue à gauche en a. *On définit de même la continuité à droite.*

On peut exprimer la continuité à partir des limites à gauche et à droite :

Propriété 4.1.7. *Une fonction f définie sur un voisinage de a est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.*

On peut caractériser la continuité de la manière suivante :

Propriété 4.1.8 (Caractérisation séquentielle de la continuité)**.** *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un voisinage d'un point a.*

- *La fonction f est continue en a si et seulement si pour toute suite (u_n) tendant vers a (et qui prendra donc ses valeurs dans tout voisinage de a à partir d'un certain rang), la suite $(f(u_n)$ tend vers $f(a)$.*
- *On peut également caractériser de cette manière la continuité à gauche (*resp. *à droite.) en se limitant aux suites prenant des valeurs strictement inférieures (*resp. *supérieures) à a.*

Démonstration. Supposons la fonction f continue en a, et soit (u_n) une suite convergeant vers a. Soit ε un réel positif. Par continuité de f en a, il existe un réel η tel que si $|x-a| \leq \eta$, alors $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$. Mais par convergence de (u_n) vers a, il existe un indice n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on ait $|u_n - a| \leq \eta$. En conséquence, si $n \geq n_0$, on a $|f(u_n) - f(a)| \leq \varepsilon$. Cela montre que la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

Montrons l'implication inverse. Pour cela, nous allons passer par la contraposée. Supposons que la fonction f n'est pas continue. Par conséquent, il existe un réel ε tel que pour tout η, il existe un x_η dans $]a-\eta, a+\eta[$ tel que $|f(a) - f(x_\eta)| \geq \varepsilon$. La suite $(x_{1/n})$ converge vers a (puisque $|x_{1/n} - a| \leq \frac{1}{n}$) sans que $(f(x_{1/n}))$ ne converge vers $f(a)$ (puisque $|f(a) - f(x_{1/n})| \geq \varepsilon$). □

Propriété 4.1.9. *Soient f et g deux fonction continues en un point a. On a les propriétés suivantes :*

- *pour tout réel λ, la fonction λf est continue en a ;*
- *la fonction $f + g$ est continue en a ;*
- *la fonction fg est continue en a ;*
- *si $g(a) \neq 0$, alors g ne s'annule pas sur un voisinage de a. La fonction $\frac{f}{g}$ est alors bien définie sur un voisinage de a et est continue en a.*

Autrement dit, l'ensemble des fonction continues en un point a constitue une *algèbre*.

Démonstration. Laissée en exercice. □

Propriété 4.1.10. *Soient f et g deux fonctions telles que f soit définie sur un voisinage I de a et continue en a, et que g soit définie sur $f(I)$ et continue en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est continue en a.*

Démonstration. On note pour simplifer $l_g = \lim_{y \to f(a)} g(y)$ et $l_f = \lim_{x \to a} f(x)$.

Soit ε un réel strictement positif. Par continuité de g en $f(a)$, on peut trouver un réel η strictement positif tel que si y est dans $|f(a) - x| \leq \eta$, alors $|g(y) - l_g| \leq \varepsilon$. Mais alors, par continuité de f en a, on peut trouver un réel strictement positif ζ tel que si $|x - a| \leq \zeta$, alors $|f(x) - l_f| \leq \eta$. Par conséquent, si $|x - a| \leq \zeta$, alors $|g(f(x)) - l_g| \leq \varepsilon$. On a donc montré que $g \circ f$ admettait l_g comme limite en a. □

4.2 Fonctions continues sur un intervalle

Le théorème suivant est un des théorèmes fondamentaux de l'analyse réelle.

Théorème 4.2.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit f une fonction continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'image $f(I)$ de I par f est un intervalle.*

Autre formulation :

Théorème 4.2.2 (Théorème des valeurs intermédiaires 2)**.** *Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Si c est tel que $f(a) < c < f(b)$, alors il existe x dans $[a, b]$ tel que $f(x) = c$.*

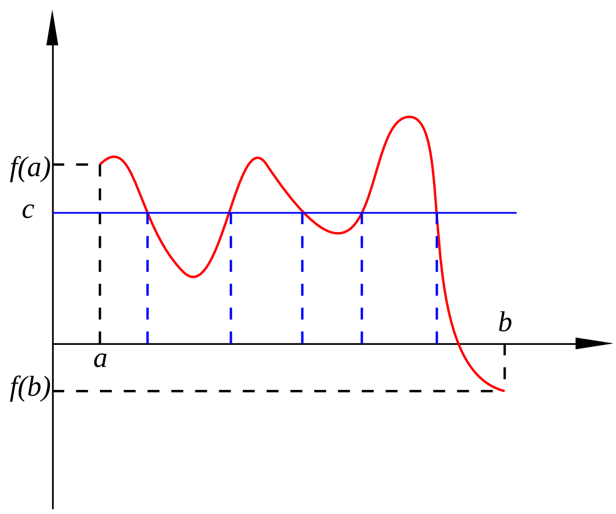

FIGURE 4.2 – Le théorème des valeurs intermédiaires. Aux pointillés bleus, les valeurs possibles de x.

Il est important de comprendre que ce résultat *n'est pas* évident. Il faut bien voir qu'il est entièrement basé sur la *complétude* de $\mathbb{R}$. Pour s'en convaincre, on peut méditer sur l'exemple de la fonction de $\mathbb{Q}$ dans lui-même qui à x associe $x^2 - 2$. Cette fonction continue prend une valeur négative en 0 et positive en 2, mais ne s'annule jamais (car $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel).

Une preuve du théorème des valeurs intermédiaires fera donc appel d'une manière ou d'une autre à la complétude de $\mathbb{R}$, que ce soit sous la forme de suites de Cauchy, de la propriété de la borne supérieure, de la propriété des segments emboîtés, etc.

Démonstration. On montre la deuxième formulation du théorème. On pose $A_c = \{x \in [a,b], f(x) \leq c\}$. L'ensemble A_c est borné (car contenu dans $[a,b]$). On peut donc définir $x_0 = \sup A_c$. On va montrer que $f(x_0) = c$. Tout d'abord remarquons que par continuité on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) < c$ pour x dans $[a, a+\varepsilon]$ et que $f(x) > c$ pour x dans $[b-\varepsilon, b]$. Par conséquent, x_0 est un élément de $]a,b[$. Ensuite, on remarque que $f(x) > 0$ sur $]x_0, c]$. Par continuité, on obtient $f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \geq c$. D'autre part, comme x_0 est la borne supérieure de A_c, il existe une suite (y_n) d'éléments de A_c qui converge vers x_0. Or $f(y_n) \leq c$, d'où $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) \leq c$. On déduit que $f(x_0) = c$. $\square$

Propriété 4.2.3. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Alors la fonction f est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, il existe y et z dans $[a,b]$ tels que*

$$f(y) \leq f(x) \leq f(z) \text{ pour tout } x \text{ de } [a,b].$$

Démonstration. Ce résultat est basé sur la compacité de l'intervalle $[a,b]$. Il faudra donc a un moment de la preuve utiliser cette propriété, par exemple avec le théorème de Bolzano-Weierstrass.

On pose $M = \sup f([a,b])$ (qui peut être infini), et on choisit une suite (x_n) telle que $(f(x_n))$ converge vers M. On extrait de (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente dont on note z la limite. Par continuité de f, la suite $(f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(z)$, d'où $M = f(z)$. On donc a montré que la fonction atteint sa borne supérieure. Le cas de la borne inférieure se fait de manière symétrique. $\square$

Définition 4.2.4. *Soit f une fonction de I un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue si elle vérifie la proposition*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in I^2,\ (|x-y| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

Cette définition signifie intuitivement que la fonction f est continue “partout de la même manière”. Il est intéressant de comparer cette définition avec celle de continuité. La continuité sur I s'exprime par l'expression

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in I,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in I,\ (|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

En revanche, l'uniforme continuité s'exprime par

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ \forall y \in I,\ (|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

Autrement dit, dans le cas de la continuité simple, η peut dépendre de x, alors que pour l'uniforme continuité η doit être le même pour tout x. On voit notamment que :

Propriété 4.2.5. *Une fonction uniformément continue est continue.*

La réciproque de cette propriété est bien entendu fausse comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto x^2$ (en effet les points n et $n+1/n$ vérifient $|n-(n+1/n)| = 1/n \to 0$, alors que $|f(n) - f(n+1/n)| = |n^2 - (n^2 + 2 + 1/n^2)| > 2$).

Théorème 4.2.6 (Théorème de Heine)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Alors la fonction f est uniformément continue sur $[a,b]$.*

Démonstration. On va montrer la contraposée. La proposition “f n'est pas uniformément continue sur I” s'écrit avec les quatificateurs

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in I,\ \exists y \in I,\ (|x-y| \leq \eta \text{ et } |f(x_\eta) - f(y_\eta)| > \varepsilon).$$

Choisissons un tel ε. On considère les suites (x_n) et (y_n) telles que $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Par la propriété de Bolzano-Weierstrass on en extrait des suites convergentes $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ (on est sur le segment $[a, b]$) (note 2). Comme on a $\left|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\right| \leq \frac{1}{\varphi(n)}$, les deux suites ont la même limite l. Comme $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \varepsilon$, la fonction f n'est pas continue. □

On a encore une propriété plus forte :

Définition 4.2.7. *On dit qu'une fonction de I dans $\mathbb{R}$ est* Lipshitzienne *si il existe une constante k telle que pour x et y dans I, on ait*

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Propriété 4.2.8. *Une fonction Lipschitzienne est uniformément continue.*

Démonstration. Pour ε donné, il suffit de choisir $\eta = \varepsilon/k$. □

La réciproque est bien entendu fausse, comme on le voit sur l'exemple de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ (en effet, les points 0 et $1/n$ vérifient $\left|\sqrt{1/n} - \sqrt{0}\right| = \sqrt{1/n} \geq \sqrt{n}|1/n - 0|$).

4.3 Dérivation

Définition 4.3.1. *On dit qu'une fonction f définie au voisinage d'un point a est* dérivable en *a si la quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, appelée* taux d'accroissement *converge vers une limite quand h tend vers 0. La limite du taux d'accroissement est notée $f'(a)$ et appelée* dérivée de f au point a.

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle ouvert est dérivable *si elle est dérivable en tout point de I. On peut alors définir sur I la fonction f' appelée* dérivée *de f.*

Au vu de cette définition, dire qu'une fonction est dérivable en un point a revient à dire que cette fonction est proche d'une fonction affine au voisinage de a. Plus précisément f est proche de la fonction

$$x \mapsto f(a) + (x - a)f'(a)$$

(voir la deuxième remarque après le corollaire 4.5.7).

Pour être dérivable, une fonction doit forcément être continue.

Propriété 4.3.2. *Si f est une fonction définie au voisinage d'un point a et est dérivable au point a, alors f est continue au point a.*

Démonstration. Si f est dérivable en a, on a

$$|f(a + h) - f(a)| = h\left|\frac{f(a + h) - f(a)}{h}\right|.$$

Or $\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right|$ converge (vers $|f'(a)|$) quand h tend vers 0 donc reste borné, de sorte que

$$|(a + h) - f(a)| \leq Ch \underset{h\to 0}{\to} 0.$$

□

(note 2). On peut prendre la même fonction extractrice φ pour (x_n) et (y_n) en extrayant d'abord une sous-suite convergente $(x_{\varphi_0(n)})$ de (x_n) puis en extrayant une sous-suite convergente $(y_{\varphi_0(\varphi_1(n))})$ de $(y_{\varphi_0(n)})$. On pose alors $\varphi = \varphi_0 \circ \varphi_1$.

En revanche on peut trouver des fonctions continues mais non dérivables :

Propriété 4.3.3. *Si a et b sont deux réels vérifiant $|a| < 1$ et $|ab| > 1$, alors la fonction définie par*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n x)$$

est continue sur $\mathbb{R}$ mais dérivable en aucun point.

Cette propriété se comprend bien en remarquant que la série $\sum a^n$ converge, alors que la série $\sum (ab)^n$ diverge (ceci ne constitue bien entendu pas une preuve complète !). Sur la figure 4.3, on a représenté la fonction f pour les valeurs $a = 0.5$ et $b = 4$.

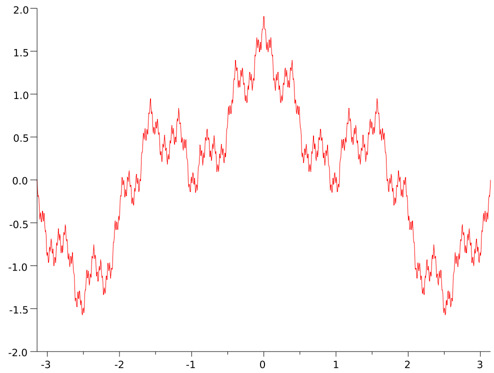

FIGURE 4.3 – Un exemple de fonction continue mais dérivable en aucun point.

Démonstration. Admis. □

La dérivabilité est stable par les opérations suivantes :

Propriété 4.3.4. *Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage d'un point a.*
- *La fonction $f + g$ est dérivable au point a et on a $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;*
- *La fonction λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$;*
- *La fonction fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$;*
- *Si $f(a)$ est non-nul, la fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable, et $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}$.*

Démonstration. Les propriétés de linéarité viennent des propriétés équivalentes pour les limites.

Pour le produit, on écrit

$$\frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} g(a+h) + f(a)\frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$

Les quantités $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $g(a+h)$, $f(a)$ et $\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$ convergent respectivement vers $f'(a)$, $g(a)$, $f(a)$ et $g'(a)$, et on sait que l'on peut passer à la limite dans un produit.

Pour l'inverse d'une fonction, on écrit (comme f est continue, on a $f(a+h) \neq 0$ pour h assez petit)

$$\frac{\frac{1}{f}(a+h) - \frac{1}{f}(a)}{h} = \frac{f(a) - f(a+h)}{hf(a)f(a+h)},$$

qui converge bien vers la limite voulue. □

Par récurrence, en appliquant plusieurs fois la formule $(fg)' = f'g + fg'$, on obtient la formule suivante :

Propriété 4.3.5 (Formule de Leibniz)**.** *Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables en un point a, on a*

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

On peut aussi composer les fonctions dérivables :

Propriété 4.3.6. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable au point a et g une fonction définie sur $f(I)$ et dérivable en $f(a)$. Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Démonstration. Soit h un réel positif. On a

$$\frac{(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a)}{h} = \frac{g(f(a) + hf'(a) + h\tau_h) - g(f(a))}{h},$$

où l'on a posé $\tau_h = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$, qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0. En conséquence,

$$\frac{(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a)}{h} = \frac{g(f(a) + hf'(a) + h\tau_h) - g(f(a))}{(f'(a) + \tau_h)h}(f'(a) + \tau_h),$$

qui tend bien vers $g'(f(a))f'(a)$ quand h tend vers 0. □

Propriété 4.3.7. *Soit f une fonction définie sur un voisinage de a et dérivable en a. Si a est un extremum local pour la fonction f, alors $f'(a) = 0$.*

On rappelle que si il existe un voisinage I d'un point a tel que $f(x) \leq f(a)$ pour tout x dans I, on dit que a est un *maximum local* de f (ou que f admet un maximum local en a), si $f(a) \leq f(x)$ pour x dans I on dit que a est un *minimum local*, et que si a est un minimum local ou un maximum local, on dit que a est un *extremum local*.

Sur la figure 4.4, on voit que la fonction a une dérivée nulle en ses extrema a_i, sauf en a_1 et a_7, situés aux bornes de l'intervalle de définition, puisque la fontion n'est pas définie sur un *voisinage* de ces points.

Démonstration. On peut supposer (quitte à changer f en $-f$) que a est un maximum local pour f. On a donc, pour h assez petit $f(a+h) \leq f(a)$. En conséquence,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0 \text{ et } f'(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0.$$

En conséquence, on a bien $f'(a) = 0$. □

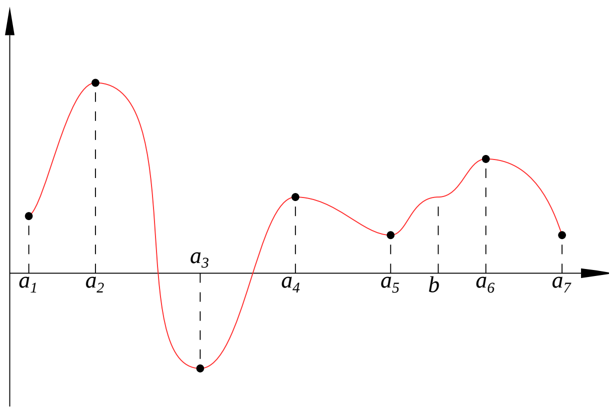

FIGURE 4.4 – Extrema d'une fonction. Les points a_i sont des extrema de la fonction représentée.

Il est important de remarque que l'on peut avoir $f'(a) = 0$ sans que f atteigne un minimum en a. L'exemple le plus classique est la fonction $x \mapsto x^3$ qui a une dérivée nulle en 0. C'est également le cas de la fonction représentée en figure 4.4 au point b.

Théorème 4.3.8 (Théorème de Rolle)**.** *Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. Le résultat est évident si la fonction f est constante égale à $f(a)$ sur l'intervalle $[a, b]$, car la dérivée de f est alors nulle en tout point de $]a, b[$.

On peut donc supposer que f est non constante, et quitte à changer f en $-f$, on peut supposer qu'elle prend une valeur strictement supérieure à $f(a)$. Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, elle atteint son maximum en un point c, qui est distinct de a et b (puisque la fonction atteint une valeur strictement supérieure à $f(a) = f(b)$). Par la propriété 4.3.7, on déduit que $f'(c) = 0$. □

Théorème 4.3.9 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b[$. Il existe un élément c de $]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

*Si la dérivée de f est bornée, on déduit notament de cette formule l'*inégalité *des accroissements finis :*

$$|f(b) - f(a)| \leq |b - a| \sup_{[a,b]} |f'(x)|.$$

Ce théorème se comprend très bien par un exemple de la vie courante : si vous vous déplacer en voiture sur l'autoroute en respectant la limite de 130km/h, en une heure vous vous trouverez nécéssairement à moins de 130 kilomètres de votre point de départ.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction g définie sur $[a, b]$ par

$$g(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

La fonction g est dérivable sur $]a,b[$ (comme somme de f et d'un polynôme) et vérifie $g(a)=0$, $g(b)=0$. Le théorème de Rolle nous permet de conclure qu'il existe c tel que $g'(c)=0$. Or $g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On a donc $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. □

Propriété 4.3.10. *Soit f une fonction dérivable définie sur un* intervalle ouvert. *Alors :*

– *f est croissante si et seulement si elle vérifie $f'(x)\geq 0$ pour tout x ;*
– *f est décroissante si et seulement si elle vérifie $f'(x)\leq 0$ pour tout x ;*
– *f est constante si et seulement si elle vérifie $f'(x)=0$ pour tout x.*

Démonstration. Supposons que f est croissante. Si $h>0$ alors, $f(x+h)-f(x)\geq 0$, d'où $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0$. De même, si $h<0$, on a $f(x+h)-f(x)\leq 0$, de sorte $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0$. En passant à la limite $h\to 0$, on trouve donc $f'(x)\geq 0$. De même, on montre qu'une fonction décroissante a une dérivée négative. Par conséquent, une fonction constante, qui est croissante et décroissante, a une dérivée à la fois positive et négative. Cette dérivée est donc nulle.

Inversement, soit f une fonction ayant une dérivée positive sur l'intervalle $]a,b[$, et soient $\alpha<\beta$ deux points de $]a,b[$. Par le théorème des accroissements finis, on peut trouver c dans $]a,b[$ tel que $f(\beta)-f(\alpha)=f'(c)(\beta-\alpha)\geq 0$ (puisque f' est uniformément nulle). Par conséquent, $f(\alpha)\leq f(\beta)$, ce qui montre que f est croissante. De même on montre qu'une fonction à dérivée négative est décroissante et par conséquent, qu'une fonction à dérivée nulle (c'est à dire à la fois positive et négative) est à la fois croissante et décroissante, et donc constante. □

Cette propriété n'est vraie que si f est définie sur un intervalle, comme le montre l'exemple de la fonction f définie sur $]-1,0[\,\cup\,]0,1[$ par la formule

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in]-1,0[\\ 1 & \text{si } x\in]0,1[\end{cases},$$

qui a une dérivée nulle sans être constante. Autre exemple : la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ qui a x associe $1/x$ a une dérivée strictement négative en tout point de $\mathbb{R}^*$, mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Corollaire 4.3.11. *Si f et g sont deux fonctions dérivables définies sur un même* intervalle *I et telles que $f'(x)=g'(x)$ pour tout x de I, alors elles ne diffèrent que par une constante :*

$$f=g+f(a)-g(a),$$

pour tout a de I.

Démonstration. La fonction $f-g$ a une dérivée uniformément nulle, elle est donc constante. □

4.4 Comportement asymptotique des fonctions

4.4.1 Relations de comparaison

Les trois notions suivantes permettent de comparer la taille relative de plusieurs fonctions en un point donné.

Définition 4.4.1. *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un réel a.*

– *On dit que f est* dominée *par g au voisinage de a si il existe une constante C telle que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ pour tout x dans un voisinage de a.*
– *On dit que f est* négligeable *devant g au voisinage de a si il existe une fonction ε définie au voisinage de a dont la limite en a vaut 0 et telle que $|f(x)| \leq |\varepsilon(x)g(x)|$.*
– *On dit que f est* équivalente *à g au voisinage de a si $f - g$ est négligeable devant g.*

Les notations suivantes (appelées *notations de Landau*) peuvent s'avérer très puissantes si l'on sait les manier correctement. Il y a notamment quelques pièges à éviter.

Définition 4.4.2. *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un réel a.*
– *Si f est négligeable devant g au point a, on notera $f(x) = o_a(g(x))$ ou "$f(x) = o(g(x))$ au voisinage de a" ou même $f(x) = o(g(x))$ tout court si il n'y a pas d'ambiguïté sur le point a.*
– *Si f est dominée par g au point a, on notera $f(x) = O_a(g(x))$ ou $f(x) = O(g(x))$.*
– *Si f est équivalent à g au point a, on notera $f(x) \sim_a g(x)$ ou $f(x) \sim g(x)$.*

On notera bien que le signe "=" devant les $O(\dots)$ et $o(\dots)$ ne désigne *pas* une égalité ! Notamment en 0 on a bien $o(x^2) = o(x)$ alors que $o(x) = o(x^2)$ est faux. En toute rigueur, il faudrait plutôt écrire $f(x) \in o(g(x))$, où l'on noterait $o(g(x))$ l'*ensemble* des fonctions négligeables devant g. L'exemple précédent reviendrait alors à dire que $o(x^2) \subset o(x)$ alors que $o(x) \not\subset o(x^2)$. On voit bien que les deux fonctions ne jouent pas un rôle symétrique.

L'autre danger de ces notation est qu'il ne faut pas utiliser le signe $\sim$ comme une égalité, même si on a équivalence entre $f \sim g$ et $g \sim f$. Notamment, *il faut se garder d'ajouter des équivalents.* Par exemple, on a les équivalences en 0

$$\sin(x) \sim x \text{ et } \tan(x) \sim x, \tag{4.1}$$

sans toutefois avoir $\sin(x) - \tan(x) \sim 0$. En réalité, on trouve

$$\sin(x) - \tan(x) \sim -\frac{x^3}{2}.$$

Notamment, on évitera d'utiliser la notation $f(x) \sim_a 0$, qui signifie que f est nulle sur un voisinage de a. Si on doit ajouter deux quantités dont on ne connaît que des équivalents, il faut revenir à la définition : dans l'exemple (4.1) les équivalents signifient

$$\sin(x) = x + o(x) \quad \text{et} \quad \tan(x) = x + o(x).$$

On a donc

$$\sin(x) - \tan(x) = x + o(x) - x + o(-x) = o(x)$$

On pourra aussi méditer sur un exemple comme $\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2}$, qui est vrai, mais $\cos(x) \sim 1 + 666x^{42}$ est tout aussi vrai.

Propriété 4.4.3. *Pour une fonction g définie sur un voisinage V de a telle que $g(x) \neq 0$ pour x dans $V \setminus \{a\}$, on a équivalence entre $f(x) \sim g(x)$ et $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.*

Démonstration. Si $f(x) \sim g(x)$, alors $f(x) - g(x) = \varepsilon(x)g(x)$ pour une certaine fonction tendant vers 0 qund x tend vers a. Pour $x \neq a$, on peut alors diviser cette égalité par $g(x)$ pour obtenir

$$\frac{f(x)}{g(x)} - 1 = \varepsilon(x),$$

ce qui montre bien que $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 pour x tendant vers a.

Inversement, si l'on suppose que $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1, alors en posant $\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - 1$, on a bien $f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x))$ pour x tendant vers 0 quand x tend vers a. □

4.4.2 Développements limités

On dit qu'une fonction f définie au voisinage d'un point a admet au un développement limité à l'ordre n en a si on peut écrire

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o_a((x-a)^n).$$

En pratique on préferera se ramener, par le changement de variables $x = a + h$ à l'écriture

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n + o_0(h^n),$$

qui permet de ne considérer que des développements limités en 0.

Propriété 4.4.4. *Soit f une fonction dérivable sur un voisinage de 0 telle que f' soit continue et admette un développement limité à l'ordre n en 0 donné par*

$$f'(x) = P_n(x) + o(x^n).$$

Alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$, donné par

$$f(x) = f(0) + \int_0^x P_n(y)\,dy + o(x^{n+1}).$$

Autrement dit, on peut intégrer un développement limité.

Démonstration. On écrit $f'(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon(x)$, où ε est une fonction tendant vers 0 en 0. En intégrant entre 0 et x, on trouve

$$f(x) = f(0) + \int_0^x P_n(y)\mathrm{d}y + \int_0^x y^n\varepsilon(y)\mathrm{d}y$$

(l'intégrale a bien un sens, puisque $x^n\varepsilon(x) = -P_n(x) + f'(x)$ est continue). Il reste alors simplement à écrire

$$\left|\int_0^x y^n\varepsilon(y)\mathrm{d}y\right| \leq \sup_{y\in[-x,x]}|\varepsilon(y)| \int_0^x y^n\mathrm{d}y = \frac{1}{n+1}\sup_{y\in[-x,x]}|\varepsilon(y)|x^{n+1}.$$

La fonction $x \mapsto \sup_{y\in[-x,x]}|\varepsilon(y)|$ tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0. □

Propriété 4.4.5. *Soit g une fonction admettant un développement limité en un point a à l'ordre n*

$$g(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

et f une fonction admettant un développement limité à l'ordre m en α_0

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1(x-\alpha_0) + \ldots + \beta_m(x-\alpha_0)^m + o((x-\alpha_0)^m)$$

alors la fonction $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre $\min(n,m)$ *en a, obtenu en composant les développements limités de f et g*

$$\begin{aligned} f \circ g(x) = &\beta_0 + \beta_1(\alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n(x-a)^n) + \ldots \\ &+ \beta_m(\alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n(x-a)^n)^m \\ &+ o((x-a)^{\min(m,n)}), \end{aligned}$$

en ne gardant que les termes d'ordre inférieur ou égal à $\min(n,m)$.

Démonstration. On écrit les termes négligeables explicitement sous la forme $(x-a)^n\varepsilon_1(x-a)$ et $(x-\alpha_0)^m\varepsilon_2(x-\alpha_0)$, où $\varepsilon_1(y)$ et $\varepsilon_2(y)$ tendent vers 0 lorsque y tend vers 0. On remplace ensuite le développement de $g(x)$ dans celui de $f(x)$ et on développe. □

4.5 Développement de Taylor

Définition 4.5.1. *Soit f une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ si elle est dérivable et si sa dérivée est continue. De même on définit par récurrence les fonctions de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ comme les fonctions dont la dérivée est de classe $\mathcal{C}^k$. On définit également les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme les fonctions qui sont de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout entier k.*

L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (avec k dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$.

Définition 4.5.2. *Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un point a. On dit que f est n fois dérivavble au point a si elle est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ au voisinage de a et si $f^{(n-1)}$ est dérivable en a.*

Si f est n fois dérivable en tout point d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, on dit qu'elle est n fois dérivable sur I.

On notera parfois $\mathcal{D}^k(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe k fois dérivable d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Propriété 4.5.3. *L'ensemble $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$ (avec k dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) est stable par combinaison linéaire et par produit.*

Démonstration. Cela se déduit des propriétés de dérivabilité d'un produit ou d'une combinaison linéaire. □

On veut approcher une fonction f par un polynôme. Une manière naturelle de faire au voisinage d'un point a est d'approcher $f(x)$ par $f(a)+f'(a)(x-a)+\ldots+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$ qui est l'unique polynôme de degré inférieur à n dont les dérivées jusqu'à l'ordre n en a sont les mêmes que celles de f (note 3).

Théorème 4.5.4 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un voisinage du point a, alors on a, pour tout h suffisament petit, le développement :*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2 f''(a)}{2} + \ldots + \frac{h^n f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!}\int_a^{a+h} (a+h-x)^n f^{(n+1)}(x)\,dx.$$

(note 3). On se rappellera que l'ensemble des polynôme de degré inférieur à n est un espace vectoriel de dimension $n+1$ et que $(1,(X-a),\ldots,\frac{(X-a)^n}{n!})$ en est une base dont la base duale $(\delta_a^{(k)})$ est définie par $\delta_a^{(k)}(P) = P^{(k)}(a)$.

Le reste intégral peut aussi s'écrire, après le changement de variables $x = a + th$ comme

$$\frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(a+th)\mathrm{d}t.$$

On remarquera que dans le cas $n = 1$, la formule de Taylor avec reste intégral est simplement la formule $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$ exprimant une fonction $\mathcal{C}^1$ comme l'intégrale de sa dérivée.

Démonstration. C'est une récurrence sur n utilisant la formule d'intégration par parties. Pour $n = 0$, l'égalité

$$f(a+h) = f(a) + \int_a^h f'(x)\mathrm{d}x$$

exprime simplement la fonction comme l'intégrale de sa dérivée. En supposant vraie l'égalité au rang n, on montre l'égalité au rang $n+1$ en intégrant par parties ($f^{(n+1)}$ se dérive en $f^{(n+2)}$ et $\frac{1}{n!}(a+h-x)^n$ se primitive en $-\frac{1}{(n+1)!}(a+h-x)^{n+1}$) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\int_a^{a+h}(a+h-x)^n f^{(n+1)}(x)\mathrm{d}x =& \left[-\frac{1}{(n+1)!}(a+h-x)^{n+1}f^{(n+1)}(x)\right]_a^{a+h}\\ &+\frac{1}{(n+1)!}\int_a^{a+h}(a+h-x)^{n+1}f^{(n+2)}(x)\mathrm{d}x\\ =&0+\frac{1}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(a)\\ &+\frac{1}{(n+1)!}\int_a^{a+h}(a+h-x)^{n+1}f^{(n+2)}(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

On peut affaiblir l'hypothèse "f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$" quitte à avoir une expression moins précise du reste.

Théorème 4.5.5 (Formule de Taylor-Lagrange)**.** *Si f est une fonction définie sur un voisinage de a telle que f soit de classe $\mathcal{C}^n$ et que $f^{(n)}$ soit dérivable, alors on a pour tout h assez petit*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2 f''(a)}{2} + \ldots + \frac{h^n f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\alpha h),$$

pour un certain α de $[0,1]$. Notamment, si $f^{(n+1)}$ est bornée, on en déduit la majoration de l'erreur :

$$\left|f(a+h) - \left(f(a) + hf'(a) + \frac{h^2 f''(a)}{2} + \ldots + \frac{h^n f^{(n)}(a)}{n!}\right)\right| \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{0\leq\alpha\leq 1}\left|f^{(n+1)}(a+\alpha h)\right|.$$

On remarquera que le cas $n = 0$ est exactement le théorème des accroissements finis.

Démonstration. On pose

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(1-t)^k h^k f^{(k)}(a+th)}{k!} - \lambda(1-t)^{n+1}.$$

On vérifie alors que φ est dérivable, puisque f est de classe $\mathcal{C}^n$ et que $f^{(n)}$ est dérivable. On a $\varphi(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k f^{(k)}(a)}{k!} - \lambda$ et $\varphi(1) = f(a+h)$. Le choix

$$\lambda = f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k f^{(k)}(a)}{k!}$$

permet donc d'avoir $\varphi(0) = \varphi(1)$, ce qui permet d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction φ. Il existe donc un α dans $[0,1]$ tel que

$$\varphi'(\alpha) = \frac{(1-\alpha)^n h^{n+1} f^{(n+1)}(a+\alpha h)}{n!} - (n+1)\lambda(1-\alpha)^n = 0,$$

et la définition de λ permet de conclure. □

On peut également se passer de l'hypothèse selon laquelle $f^{(n)}$ est dérivable en cherchant une expression encore moins fine du reste.

Théorème 4.5.6 (Formule de Taylor-Young)**.** *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ telle que f^{n-1} soit dérivable, alors on a le développement :*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2 f''(a)}{2} + \ldots + \frac{h^n f^{(n)}(a)}{n!} + o(h^n).$$

Le cas $n = 0$ est simplement la définition de la continuité de f en a, et le cas $n = 1$ est la définition de la dérivabilité de f en a.

Démonstration. On le montre par récurrence.

Le cas $n = 1$ correspond à la définition de la dérivabilité de f en a.

Supposons la propriété vraie au rang n. Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ avec $f^{(n)}$ dérvable, alors f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et sa dérivée $n-1^{\text{ème}}$ est dérivable, on peut donc lui appliquer la propriété, de sorte que

$$f'(a+h) = f'(a) + hf''(a) + \frac{h^2 f'''(a)}{2} + \ldots + \frac{h^n f^{(n+1)}(a)}{n!} + o(h^n).$$

Il suffit ensuite d'intégrer ce développement limité en vertu de la propriété 4.4.4. □

Il est important de remarquer que dans chacun de ces trois cas, les hypothèses sont les hypothèses "minimales" pour écrire la formule. À chaque fois on suppose un cran de régularité en moins, et la conclusion est légèrement plus faible.

Corollaire 4.5.7. *Une fonction n fois dérivable en un point a admet un développement limité à l'ordre n au point a.*

Quelques remarques :

- La réciproque de ce théorème est *fausse* ! Pour s'en convaincre, il suffit de considérer une fonction f continue mais non dérivable, vérifiant $f(0) = 0$. On pose ensuite $f_n(x) = x^n f(x)$. Comme f est continue en 0, on a par définition $f_n(x) = o(x^n)$ en 0. Cependant la fonction f_n n'est dérivable qu'au point $x = 0$.
- Toutefois une partie de la réciproque pour $n = 1$ est vraie. En effet, le développement limité à l'ordre 1, $f(x+h) = f(x) + h\lambda + o(h)$ revient exactement à la définition de la dérivabilité de f en x avec $f'(x) = \lambda$. En fait ce qui empêche de passer à n supérieur à 1 est le fait qu'un développement limité donne de l'information sur la fonction (par exemple si elle est dérivable), mais pas sur ses dérivées (par exemple il n'indique pas que la dérivée est dérivable).

4.5.1 Développement des fonctions usuelles

On peut appliquer la formule de Taylor-Young, ou la propriété 4.4.4, pour trouver les développements limités en 0 des fonctions usuelles.

$$\begin{aligned}
e^x =& 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \text{ (définition) ;}\\
\cos(x) =& 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \mathcal{O}(x^{2n+2}) \text{ (partie réele de } e^{ix}\text{) ;}\\
\sin(x) =& x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \mathcal{O}(x^{2n+3}) \text{ (partie imaginaire de } e^{ix}\text{) ;}\\
\frac{1}{1-x} =& 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \text{ (série géométrique) ;}\\
\ln(1+x) =& x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \text{ (primitive de } (1+x)^{-1}\text{) ;}\\
\arctan(x) =& x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \mathcal{O}(x^{2n+3}) \text{ (primitive de } (1+x^2)^{-1}\text{) ;}\\
(1+x)^\alpha =& 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \text{ (Taylor-Young).}
\end{aligned}$$

Chapitre 5

Intégration

5.1 Intégration sur un segment

Il existe plusieurs théories de l'intégration, permettant de donner un sens à l'intégrale des fonctions appartenant à une certaine catégorie de fonctions, plus ou moins vaste selon la théorie utilisée. La théorie de l'intégration que nous présenterons ici est l'intégrale de Riemann. Nous allons revenir sur la contruction de cette intégrale.

La notion d'intégrale a pour objectif d'associer au plus grand nombre possible de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ un nombre, noté $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, qui correspondrait à la "taille" de cette fonction. On peut notamment penser à la surface présente sous le graphe de la fonction.

On s'attend à ce que l'intégrale vérifie les propriétés "évidentes" suivantes :
(croissance) Si f et g sont deux fonctions ayant une intégrale et telles que $f \leq g$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(linéarité) Si f et g sont deux fonctions admettant une intégrale et λ et μ deux réels, alors $\lambda f + \mu g$ admet une intégrale qui vaut

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(cas des fonctions élémentaires) Une fonction de la forme $\mathbf{1}_{(\alpha,\beta)}$ (note 1), (note 2), où $\alpha \leq \beta$ sont des éléments de $[a,b]$, a une intégrale, donnée par

$$\int_a^b \mathbf{1}_{(\alpha,\beta)} = \beta - \alpha.$$

Nous allons maintenant partir de ces trois propriétés élémentaires pour en déduire une notion d'intégrale pouvant s'appliquer à une classe plus grande de fonctions, contenant notamment toutes les fonctions continues sur $[a,b]$.

(note 1). Les parenthèses désignent des crochets ouverts ou fermés
(note 2). Pour une partie A de $\mathbb{R}$ fonction $\mathbf{1}_A$, appelée *indicatrice* de A est définie par $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ sinon.

Définition 5.1.1.
- *On appelle* subdivision *d'un segment* $[a, b]$ *une suite finie*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

La quantité $\max_{i=0}^{n-1} |x_{i+1} - x_i|$ *s'appelle le* pas *de la subdivision.*
- *On dit qu'une fonction* f *définie sur un segment* $[a, b]$ *est* en escalier *si il existe une subdivision* $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ *de* $[a, b]$ *telle que* f *soit constante sur l'intervalle* $]x_i, x_{i+1}[$.

Une fonction en escalier est donc de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{1}_{]x_{i-1},x_i[}(x) + \sum_{i=0}^{n} \mu_i \mathbf{1}_{\{x_i\}}(x),$$

avec $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. La propriété de linéarité permet de définir l'intégrale d'une fonction en escalier à partir des intégrales de fonctions élémentaires : en effet, on peut écrire

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{1}_{]x_i,x_{i-1}[}(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_a^b \mathbf{1}_{]x_i,x_{i-1}[}(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_{i-1}).$$

Noter que les fonctions de la forme $\mathbf{1}_{\{c\}}$ ont une intégrale nulle, on va donc les oublier dans le reste du chapitre.

Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$. On suppose que la fonction f admet une intégrale. Si v et w sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que $v \leq f \leq w$, la propriété de croissance nous donne l'inégalité suivante, illustrée sur la figure 5.1

$$\int_a^b v(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b w(x)\mathrm{d}x.$$

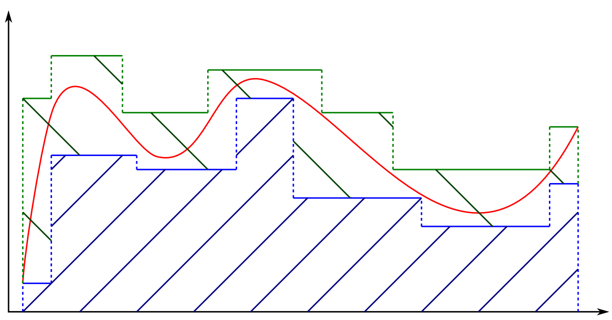

FIGURE 5.1 – Encadrement d'une fonction par des fonctions en escalier. L'aire sous la courbe est encadrée par les deux surfaces hachurées.

En passant à la borne supérieure sur toutes les fonctions v en escalier inférieures à f et à la borne inférieure sur toutes les fonctions w en escalier supérieures à f, on obtient l'encadrement

$$\sup_{v \leq f} \int_a^b v(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \inf_{f \leq v} \int_a^b v(x)\mathrm{d}x.$$

On est donc amenés naturellement à la définition suivante :

Définition 5.1.2. *On dit qu'une fonction f définie sur un segment $[a,b]$ est* intégrable *si*

$$\sup_{v\leq f}\int_a^b v(x)\,dx = \inf_{f\leq v}\int_a^b v(x)\,dx,$$

où les bornes supérieures et inférieures sont calculées sur l'ensemble des fonctions en escalier v respectivement inférieures et supérieures à la fonction f. On définit alors l'intégrale de f comme la valeur

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup_{v\leq f}\int_a^b v(x)\,dx = \inf_{f\leq v}\int_a^b v(x)\,dx.$$

Le principe de cette définition est le suivant : on sait intégrer les fonctions en escalier, dont les graphes ne sont que des réunions de rectangles, la propriété de croissance de l'intégrale permet donc d'encadrer l'hypothétique intégrale d'une fonction f par les bornes inférieures et supérieures de la définition 5.1.2. Quand ces deux bornes sont égales, l'intégrale de la fonction, si elle existe, *ne peut pas* valoir autre chose que la valeur commune de ces deux bornes. On *définit* donc l'intégrale de f de cette manière.

On utilise également la convention suivante, de sorte que la relation de Chasles soit vérifiée :

Définition 5.1.3. *Si $b\leq a$ et si f est une fonction intégrable sur $[b,a]$ on* définit

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Cette convention donne la propriété suivante :

Propriété 5.1.4 (Propriété de Chasles)**.** *Si a, b et c sont trois réels et si f est fonction intégrable définie sur un segment I contenant a, b et c, alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Démonstration. Supposons que $a\leq b\leq c$. On a alors,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^c \mathbf{1}_{[a,b]}(x)f(x)\mathrm{d}x + \int_a^c \mathbf{1}_{]b,c]}(x)f(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_a^c (\mathbf{1}_{[a,b]}(x)+\mathbf{1}_{]b,c]}(x))f(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Si $a\leq c\leq b$ on fait un calcul similaire en utilisant la convention de la définition 5.1.3 et en remarquant que $\mathbf{1}_{[a,b]}(x)-\mathbf{1}_{[c,b]}(x)=\mathbf{1}_{[a,c[}(x)$. Les autres cas se traitent de manière similaire. □

Nous allons maintenant voir une manière plus explicite de calculer l'intégrale.

Définition 5.1.5. *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, et $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ une subdivision de $[a,b]$. On appelle* somme de Riemann *associée à la subdivision $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ toute somme de la forme*

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1}-x_i)$$

où c_i est un élément de $[x_i,x_{i+1}]$.

On a la caractérisation suivante des fonctions intégrables.

Propriété 5.1.6. *Une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$ est intégrable si et seulement si les sommes de Riemann associées aux subdivisions de $[a,b]$ convergent quand le pas de la subdivision tend vers* 0.

Plus précisément f est intégrable si et seulement la proposition suivante est vraie :

$$\exists \lambda,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x_i)_{i=0,\dots,n},\ \left(Pas(x_i)_{i=0,\dots,n} < \eta \Rightarrow \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i) - \lambda \right| \leq \varepsilon \right).$$

Le réel λ est alors nécessairement égal à $\int_a^b f(x)dx$.

Démonstration. Admis. □

Un cas particulier important en pratique, notamment pour calculer des limites de sommes, est le cas de la subdivision uniforme $(u_i^{[a,b],n})_{i\in\{0,\dots,n\}}$ sur $[a,b]$ définie par

$$u_i^{[a,b],n} = a + \frac{i}{n}(b-a).$$

Le pas de cette subdivision vaut $\frac{b-a}{n}$.

Dans la suite, on se limitera à un sous-ensemble de l'ensemble des fonctions intégrables, plus simple à caractériser, qui contient les fonctions continues. Il s'agit de l'ensemble des fonctions *continues par morceaux*, défini ci-dessous.

Définition 5.1.7. *On dit qu'une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ est* continue par morceaux *si il existe une subdivision $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ de $[a,b]$ telle que $f_{]x_i,x_{i+1}[}$ soit continue et admette des limites en x_i^+ et en x_{i+1}^-.*

Propriété 5.1.8. *Toute fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ est intégrable.*

Dans la suite de ce chapitre, on ne considérera que des intégrales de fonctions continues par morceaux. Les fonctions continues par morceaux conserve une propriété importante des fonctions continues : elles sont bornées sur les segments.

Propriété 5.1.9. *Une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ est bornée.*

Démonstration. Soit $(x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ une subdivision de $[a,b]$ associée à une fonction continue f. Pour $i = 1,\dots,n$, la fonction f est continue sur $]x_{i-1},x_i[$ et admet des limites finies en x_{i-1} et x_i. Par conséquent, elle se prolonge en une fonction continue sur $[x_{i-1},x_i]$ et est donc bornée sur $]x_{i-1},x_i[$. On a donc, pour tout x de $[a,b]$,

$$|f(x)| \leq \max\left(\max_{i=1}^{n} \sup_{]x_{i-1},x_i[} |f|\ ,\ \max_{i=0}^{n} |f(x_i)| \right) < \infty.$$

Le maximum de la formule précédente est fini car il n'y a qu'un nombre *fini* de termes dans ce maximum. □

Deux inégalités utiles pour encadrer des intégrales :

Propriété 5.1.10 (Inégalité de la moyenne et inégalité triangulaire)**.** *Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a,b]$, alors on a l'*inégalité triangulaire

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

*ainsi que l'*inégalité de la moyenne

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \sup_{[a,b]} |g| \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Démonstration. On a, par définition de la valeur absolue, $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. La propriété de croissance de l'intégrale nous donne alors

$$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,$$

ce qui donne la première inégalité.

Pour la deuxième, on remarque que

$$0 \leq |f(x)g(x)| \leq |f(x)| \sup_{[a,b]} |g|$$

et on intègre par rapport à x. □

Propriété 5.1.11 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a,b]$, alors*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx \int_a^b |g(x)|^2\,dx}$$

Démonstration. On considère le polynôme de degré 2 suivant :

$$P(X) = \int_a^b (Xf(x)+g(x))^2\mathrm{d}x = \left(\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\right) X^2 + 2\left(\int_a^b (x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\right) X + \int_a^b (x)|g(x)|^2\mathrm{d}x.$$

La première expression de P montre qu'il ne prend que des valeurs positives sur $\mathbb{R}$, et notamment que son discriminant est positif. D'après la deuxième expression, ce discriminant vaut

$$\Delta = 4\left(\int_a^b (x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 - 4\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x \int_a^b |g(x)|^2\mathrm{d}x.$$

On a donc montré l'inégalité. □

On peut également définir l'intégrale de fonctions continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$, ou même dans un espace vectoriel réel de dimension *finie* quelconque. Il suffit pour cela de travailler coordonnée par coordonnée : on considère une fonction f à valeurs un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie et on écrit $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i$ où $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ est une base de E. On définit alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(x)\mathrm{d}x \right) e_i \in E,$$

on est donc ramené à des intégrales de fonctions à valeurs réelles. Toutes les résultats ci-dessus sont alors vrais, quitte à remplacer la valeur absolue par une norme sur E.

5.2 Lien entre intégrale et primitive

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I admet une *primitive* F si la fonction F est dérivable sur I et vérifie $F'(x) = f(x)$, pour tout x de I.

On a la propriété suivante :

Propriété 5.2.1. *Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$. Soit c un point de $[a, b]$. On pose $F_c(x) = \int_c^x f(y)dy$. On a les résultats suivants :*

1. *la fonction F_c est continue ;*
2. *si f est continue en x, alors F_c est dérivable en x et vérifie $F_c'(x) = f(x)$;*
3. *si f est continue sur $[a, b]$, F_c est de classe $\mathcal{C}^1$ et est l'unique primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en c. Notamment, pour tout primitive F de f, on a*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Démonstration. 1. Comme f est continue par morceaux, elle est bornée par une constante M. On peut alors écrire

$$|F_c(x) - F_c(y)| = \left| \int_x^y f(x)\mathrm{d}x \right| \leq \left| \int_x^y |f(x)|\mathrm{d}x \right| \leq \left| \int_x^y M\mathrm{d}x \right| = M|x - y|.$$

La fonction F_c est donc Lipschitzienne, et par conséquent continue.

2. On va montrer que le taux d'accroissement de F_c en un point x_0 où f est continue tend vers $f(x_0)$. Soit ε un réel positif, et soit η tel que

$$|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t - f(x_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)\mathrm{d}t \right| \\ &\leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Si $|x - x_0| \leq \eta$, pour tout t dans $[x_0, x]$ (note 3) on a $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$, de sorte que

$$\left|\frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} \varepsilon \mathrm{d}t = \varepsilon.$$

Cela montre que F_c est dérivable en x_0 de dérivée $f(x_0)$.

3. Si f est continue en tout point de $[a, b]$, alors F_c est, d'après le point précédent, dérivable sur $[a, b]$ et $F_c' = f$ est une fonction continue. L'unicité de la primitive a été vue dans le cours sur les fonctions réelles. L'identité $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ se déduit de la propriété de Chasles.

□

Un corollaire important de cette propriété est que toute fonction continue admet une primitive.

On déduit de cette propriété les deux règles de calculs suivantes, très importantes pour le calcul d'intégrales.

Propriété 5.2.2. *Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, on a l'égalité*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Démonstration. La fonction uv est de classe $\mathcal{C}^1$, on a donc notamment

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

□

Propriété 5.2.3. *Si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et si f est continue sur $\varphi([a, b])$ (note 4), alors on a*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

Un moyen mnémotechnique simple pour retrouver cette formule est d'imaginer qu'on a posé $y = \varphi(x)$, de sorte que $\mathrm{d}y = \varphi'(x)\mathrm{d}x$, que $f(y) = f(\varphi(x))$ et que si x varie de a à b, alors y varie de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$.

Démonstration. Soit F une primitive de f (une telle fonction existe, puisque f est continue). On a alors, puisque $(F \circ \varphi)'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

□

Dans la plupart des cas, les changements de variables utilisés sont bijectifs : φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a, b]$ dans $[\varphi(a), \varphi(b)]$ (note 5) et on peut alors écrire la formule de changement de variables sous la forme

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

(note 3). ou $[x, x_0]$ suivant les cas.
(note 4). Qui est un segment.
(note 5). ou $[\varphi(b), \varphi(a)]$.

5.3 Intégration approchée

Il est utile de pouvoir donner des valeurs approchées à une intégrale que l'on ne sait pas déterminer explicitement.

On va présenter deux méthodes simples pour ce faire. L'idée de base est que l'intégrale d'une fonction sur un segment peut être approchée par la longueur du segment multipliée par la valeur de la fonction en un point du segment. On va voir que le choix de ce point à une importance.

5.3.1 La méthode des rectangles à gauche

La méthodes rectangles à gauche consiste à utiliser l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq (b-a)f(a).$$

On remarque que cette approximation est exacte si la fonction f est constante. Pour estimer l'erreur commise dans le calcul de cette intégrale, on va donc mesurer à quel point la fonction f est proche de la constante $f(a)$. Ceci est formulé dans le résultat suivant :

Lemme 5.3.1. *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$, alors on a*

$$\left|\int_a^b f(x)dx - f(a)(b-a)\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2}\sup_{[a,b]}|f'|.$$

Démonstration. La formule de Taylor-Lagrange appliqué à f en a nous donne la majoration suivante :

$$|f(x)-f(a)| \leq (x-a)\sup_{[a,b]}|f'|.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - f(a)(b-a)\right| = \left|\int_a^b (f(x)-f(a))\mathrm{d}x\right| &\leq \int_a^b |f(x)-f(a)|\mathrm{d}x \\ &\leq \int_a^b (x-a)\mathrm{d}x \sup_{[a,b]}|f'| \\ &= \frac{(b-a)^2}{2}\sup_{[a,b]}|f'|.\end{aligned}$$

□

En revanche, la quantité $\frac{(b-a)^2}{2}\sup_{[a,b]}|f'|$ n'a aucune raison d'être petite. Pour que l'intégrale approchée soit proche de la vraie valeur, une méthode est de subdiviser l'intervalle en N sous-intervalles plus petits, et d'appliquer la méthode des rectangles à chacun des sous-intervalles.

Plus précisément, on a le résultat :

Propriété 5.3.2. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors on a*

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(a+k\frac{b-a}{N}\right)\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2N}\sup_{[a,b]}|f'|.$$

Démonstration. En appliquant le lemme 5.3.1 à la fonction f sur l'intervalle $[a+(b-a)\frac{k}{N}, a+(b-a)\frac{k+1}{N}]$, on obtient la majoration

$$\left| \int_{a+k\frac{b-a}{N}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{N}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{N} f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2N^2} \sup_{[a,b]} |f'|.$$

En sommant de $k = 0$ à $N-1$, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{N}\right) \right| &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{a+k\frac{b-a}{N}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{N}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{N} f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right) \right| \\ &\leq N\frac{(b-a)^2}{2N^2} \sup_{[a,b]} |f'| \\ &= \frac{(b-a)^2}{2N} \sup_{[a,b]} |f'|. \end{aligned}$$

□

On peut aussi parler d'une méthode des rectangles à droite, pour laquelle les mêmes résultats sont valides.

5.3.2 La méthode du point milieu

Dans cette partie, on va utiliser la même méthode qu'à la partie précédente, mais en évaluant la fonction au *milieu* de l'intervalle et non pas en son bord. Autrement dit on utilise l'approximation

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

On pourrait croire que l'erreur d'approximation sera sensiblement la même que pour la méthode des rectangles à gauche. On va voir qu'il n'en est rien.

La différence vient du fait que la méthode du point milieu est exacte non seulement pour les fonctions constantes, mais aussi pour les fonctions *affines*. Par conséquent, on peut estimer l'erreur commise en estimant la différence entre la fonction et une fonction affine. Graphiquement, cela vient du fait que l'erreur commise sur la première moitié de l'intervalle compense celle commise sur la deuxième moitié.

Lemme 5.3.3. *Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. On a la majoration :*

$$\left| \int_a^b f(x)dx - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \sup_{[a,b]} |f''|.$$

Démonstration. La formule de Taylor-Lagrange appliquée à f sur $[a,b]$ nous donne

$$\left| f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{2} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \sup_{[a,b]} |f''|.$$

La conclusion vient du même calcul que pour le lemme 5.3.1, en utilisant les identités

$$\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \mathrm{d}x = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

et

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{(b-a)^3}{12}.$$

□

Comme précédemment, on en déduit

Propriété 5.3.4. *Soit $N \geq 1$ et f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. On a*

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{N} f\left(a + \left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{N}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24N^2} \sup_{[a,b]} |f''|.$$

On voit que dans le cas de la méthode du point milieu, l'erreur est de l'ordre de $\mathcal{O}(N^{-2})$, ce qui est bien meilleur que dans le cas de la méthode des rectangle, où l'erreur est en $\mathcal{O}(N^{-1})$.

5.4 Intégration sur un intervalle quelconque

On peut légitimement se poser la question de définir l'intégrale de fonctions définies sur un intervalle quelconque plutôt que de se limiter à des segment. Sur un intervalle ouvert (dont une des bornes peut désormais valoir $\pm\infty$) on peut observer différents problèmes qui ne se posaient pas sur un segment. En effet, la définition naturelle de fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque I (qui généralise notamment les fonctions continues) est la suivante, pour laquelle une fonction continue par morceaux peut très bien tendre vers $\pm\infty$ à une des bornes.

Définition 5.4.1. *On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I (non nécessairement fermé) est* continue par morceaux *si elle est continue par morceaux sur tout segment contenu dans I.*

Ainsi, on se convaincra sans peine qu'une fonction continue par morceaux sur un intervalle ne peut pas nécessairement être encadrée par des fonctions en escalier intégrables, de sorte que la définition 5.1.2 ne s'y applique pas.

Définition 5.4.2. *On dit qu'une fonction* positive *continue par morceaux sur un intervalle I est* intégrable *si elle vérifie une des trois propriétés équivalentes suivantes :*

1. $\sup_{J \text{ segment} \subset I} \int_J f(x)dx < \infty$ *;*
2. *il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissant vers $\inf I$ et une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissant vers $\sup I$ telles que $\lim_n \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx$ existe ;*
3. *pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissant vers $\inf I$ et toute suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissant vers $\sup I$, la limite $\lim_n \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx$ existe.*

On appelle alors intégrale *de f le nombre*

$$\sup_{J \text{ segment } \subset I} \int_J f(x)dx = \lim_n \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx.$$

On peut définir de même l'intégrale d'une fonction de signe quelconque, en passant par la valeur absolue de la fonction.

Définition 5.4.3. *Une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ est dite* intégrable *si $|f|$ est intégrable sur I (au sens de la définition précédente). On dit aussi que l'intégrale* converge. *Dans ce cas, la limite*

$$\lim_n \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx$$

existe et ne dépend pas des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I tendant respectivement vers $\inf I$ et $\sup I$. On définit alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_n \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx.$$

On peut ramener l'étude de l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle à l'étude de l'intégrabilité aux bornes de cet intervalle :

Propriété 5.4.4. *Soit I un intervalle, soient a et b deux réels avec $\inf I < a < b < \sup I$ et f une fonction continue par morceaux sur I. Alors f est intégrable sur I si et seulement si elle est intégrable sur $]\inf I, a]$ et sur $[b, \sup I[$.*

Démonstration. On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant respectivement vers $\inf I$ et $\sup I$. On écrit alors

$$\int_{a_n}^{b_n} |f(x)|\mathrm{d}x = \int_{a_n}^{a} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x + \int_b^{b_n} |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Quand n tend vers l'infini, le membre de gauche converge si et seulement si f est sommable sur I, et le membre de droite converge si et seulement si f est sommable sur $]\inf I, a]$ et $[b, \sup I[$ (l'intégrale sur $[a, b]$ converge, puisqu'on intègre une fonction continue par morceaux sur un *segment*). Cela montre le résultat. □

L'inégalité triangulaire est toujours vraie pour les intégrales sur un intervalle quelconque, de même que la linéarité.

Propriété 5.4.5. *Soit f une fonction intégrable sur un intervalle I. Alors*

$$\left|\int_I f(x)\,dx\right| \leq \int_I |f(x)|\,dx.$$

Démonstration. Pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de I tendant respectivement vers $\inf I$ et $\sup I$, on écrit $\left|\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_{a_n}^{b_n} |f(x)|\,\mathrm{d}x$, puis on fait tendre n vers ∞. □

Propriété 5.4.6. *Soit I un intervalle et f et g deux fonctions sommables sur I. Si λ et μ sont deux réels, alors $\lambda f + \mu g$ est sommable sur I et on a*

$$\int_I \lambda f(x) + \mu g(x)\,dx = \lambda \int_I f(x)\,dx + \mu \int_I g(x)\,dx.$$

Démonstration. On considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de I tendant respectivement vers $\inf I$ et $\sup I$. On écrit $\int_{a_n}^{b_n} |\lambda f(x) + \mu g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \lambda \int_{a_n}^{b_n} |f(x)|\mathrm{d}x + \mu \int_{a_n}^{b_n} |g(x)|\mathrm{d}x$. En faisant tendre n vers ∞, on voit que $\lambda f + \mu g$ est sommable.

L'égalité des intégrales s'obtient en passant à la limite dans $\int_{a_n}^{b_n} \lambda f(x) + \mu g(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_{a_n}^{b_n} g(x)\mathrm{d}x$. □

On s'intéresse maintenant au comportement asymptotique de l'intégrale d'une fonction au voisinage d'une borne de l'intervalle d'intégration. Le théorème suivant est tout à fait analogue à ce qui a été fait pour les séries.

Théorème 5.4.7. *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle* $[a, b[$ (note 6) avec g positive.

- *Si g n'est pas intégrable sur $[a, b[$ et si $f(x) = o(g(x))$ (respectivement $f(x) = O(g(x))$, $f(x) \sim g(x)$) au voisinage de b alors*
$$\int_a^x f(t)\,dt = o\left(\int_a^x g(t)\,dt\right) \;(resp.\; \int_a^x f(t)\,dt = O\left(\int_a^x g(t)\,dt\right),\; \int_a^x f(t)\,dt \sim \int_a^x g(t)\,dt),$$
au voisinage de b.
- *Si g est intégrable sur $[a, b[$ et si $f(x) = o(g(x))$ (respectivement $f(x) = O(g(x))$, $f(x) \sim g(x)$) au voisinage de b alors f est intégrable sur $[a, b[$ et on a*
$$\int_x^b f(t)\,dt = o\left(\int_x^b g(t)\,dt\right) \;(resp.\; \int_x^b f(t)\,dt = O\left(\int_x^b g(t)\,dt\right),\; \int_x^b f(t)\,dt \sim \int_x^b g(t)\,dt),$$
au voisinage de b.

Ce théorème permet notamment d'étudier l'intégrabilité d'une fonction en se ramenant à des fonctions équivalentes dont on connaît l'intégrabilité.

Démonstration. On ne traite que le cas g non-intégrable en b et $f = o(g)$, les autres cas se traitant de manière similaire.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f = o(g)$ au voisinage de b, il existe un élément x_0 de $[a, b[$ tel que si $x \in [x_0, b[$ alors, $|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} g(x)$. On a donc pour $x > x_0$
$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right| + \int_{x_0}^x |f(t)|\mathrm{d}t \leq \left|\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right| + \frac{\varepsilon}{2}\int_{x_0}^x g(t)\mathrm{d}t \leq \left|\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right| + \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g(t)\mathrm{d}t.$$
Comme g n'est pas intégrable en b, $\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers b, et il existe un x_1 dans $[a, b[$ tel que si $x > x_1$, alors
$$\left|\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g(t)\mathrm{d}t.$$
Finalement, on a, pour $x \geq \max(x_1, x_2)$
$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \leq \varepsilon \int_a^x g(t)\mathrm{d}t,$$
ce qui montre que $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = o\left(\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)$. □

(note 6). le même résultat est bien entendu vrai pour des intervalles de la forme $]a, b]$ si l'on fait les substitutions adéquates

Beaucoup de fonctions usuelles ont un comportement équivalent à une puissance de x au voisinage des bornes d'intégration. Il est donc utile de savoir pour quelles valeur de α la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,\infty[$.

Propriété 5.4.8. *1. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha > -1$.*

2. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est intégrable sur $[1,\infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$.

Démonstration. Pour tout $x > 0$, on a $x^\alpha > 0$, il suffit donc d'étudier le comportement asymptotique des suites

$$\int_{1/n}^1 x^\alpha \mathrm{d}x \text{ et } \int_1^n x^\alpha \mathrm{d}x.$$

On a pour $\alpha = -1$

$$\int_{1/n}^1 x^\alpha \mathrm{d}x = [\ln(x)]_{1/n}^1 = \ln(n) \quad \text{et} \quad \int_1^n x^\alpha \mathrm{d}x = [\ln(x)]_1^n = \ln(n).$$

Par conséquent, pour $\alpha = -1$, x^α n'est intégrable ni sur $]0,1]$ ni sur $[1,\infty[$. Pour $\alpha \neq 1$, on a

$$\int_{1/n}^1 x^\alpha \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{1/n}^1 = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} \quad \text{et} \quad \int_1^n x^\alpha \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^n = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}.$$

On doit donc différencier selon le signe de $\alpha+1$. On observe alors que $\int_{1/n}^1 x^\alpha \mathrm{d}x$ a une limite finie si et seulement si $\alpha > -1$ et que $\int_1^n x^\alpha \mathrm{d}x$ a une limite finie si et seulement si $\alpha < -1$. □

Les autres comportement classiques à la limite d'un intervalle sont les comportement logarithmiques et exponentiels.

Propriété 5.4.9. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \ln^\alpha(x)$ est intégrable sur $]0,1]$ mais pas sur $[1,\infty[$. La fonction $e^{\lambda x}$ est intégrable sur $[0,\infty[$ si et seulement si $\lambda < 0$.*

Démonstration. On sait que $\frac{1}{x} = o(\ln^\alpha(x))$ en $+\infty$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Or $\frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1,\infty[$, donc $\ln^\alpha$ non plus.

On sait également que $\ln^\alpha(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ en 0, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$, la fonction $\ln^\alpha$ l'est donc aussi.

Pour la fonction exponentielle, un calcul donne, pour $\lambda \neq 0$

$$\int_0^n e^{\lambda x} \mathrm{d}x = \left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right]_0^n = \frac{1 - e^{\lambda n}}{\lambda}.$$

Si $\lambda > 0$ cette suite diverge, si $\lambda < 0$, elle converge vers $\frac{1}{\lambda}$. Le cas $\lambda = 0$ correspond à une fonction constante, ce qui a déjà été traité dans le cas des fonction puissances.

□

5.5 Théorèmes de convergence

Le théorème suivant est l'outil principal pour étudier l'intégrabilité de la limite d'une suite de fonctions.

Théorème 5.5.1 (Théorème de convergence dominée)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I. On suppose que*

1. *pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;*
2. *la fonction $f(x) = \lim_n f_n(x)$ est continue par morceaux ;*
3. *il existe une fonction positive g intégrable sur I telle que*

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

pour tout n et tout x de I.

Alors, les f_n et f sont intégrables sur I et

$$\lim_n \int_I |f_n(x) - f(x)| \, dx = 0. \tag{5.1}$$

De plus, on a

$$\lim_n \int_I f_n(x) dx = \int_I f(x) dx.$$

Démonstration. Admis. Le résultat “fort” à montrer est la limite (5.1). La deuxième conclusion s'en déduit par

$$\left| \lim_n \int_I f_n(x)\mathrm{d}x - \int_I f(x)\mathrm{d}x \right| \leq \lim_n \int_I |f_n(x)\mathrm{d}x - f(x)| \, \mathrm{d}x \to 0.$$

□

On va démontrer une version plus faible de ce théorème, mais dont la preuve sera plus simple.

Propriété 5.5.2. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur un segment $[a, b]$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f continue par morceaux. Alors, les f_n et f sont intégrables sur $[a, b]$ et*

$$\lim_n \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, dx = 0.$$

Démonstration. Les f_n étant continues par morceaux sur le segment $[a, b]$, elles sont bornées, donc intégrables. Comme f est continue par morceaux, la fonction $|f_n - f|$ est continue par morceaux, donc intégrable. Enfin, on a

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \leq |b - a| \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

□

5.6 Intégrales dépendant d'un paramètre

Dans cette partie on s'intéresse aux fonctions définies comme l'intégrale d'une fonction de plusieurs variables par rapport à l'une de ses variables. Une question naturelle est alors de trouver des critères pour assurer que ces fonctions sont continues, dérivables, etc.

On va noter (t, x) les variables de la fonction à intégrer, t désignant la variable d'intégration, qui vivra donc dans un intervalle de $\mathbb{R}$, et x désigant la variable par rapport à laquelle on souhaite obtenir de la régularité (c'est-à-dire de la continuité, de la dérivabilité, etc.). Cette variable vivra dans une partie de $\mathbb{R}^d$ (par exemple).

Dans les théorèmes à suivre, on va donc faire des hypothèses d'intégrabilité sur la fonction $t \mapsto f(t, x)$, et des hypothèses de régularité sur la fonction $x \mapsto f(t, x)$.

On commence par énoncer un théorème permettant de prouver la *continuité* d'une fonction définie par une intégrale.

Théorème 5.6.1 (Théorème de continuité sous l'intégrale)**.** *Soit f une fonction définie sur $I \times \Omega$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω une partie de $\mathbb{R}^d$. On suppose que*

1. *pour tout t de I la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est continue sur Ω ;*
2. *pour tout x de Ω, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est continue par morceaux sur I ;*
3. *il existe une fonction g positive, continue par morceaux et intégrable sur I telle que $|f(t, x)| \leq g(t)$ pour tout (t, x) de $I \times \Omega$.*

Alors la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable pour tout x et la fonction F définie par

$$F(x) = \int_I f(t, x)\, dt$$

est continue sur Ω.

Démonstration. Comme, pour tout x, la fonction $t \mapsto |f(t, x)|$ est majorée par la fonction intégrable g, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable et la définition de F a bien un sens.

Soit x un point de Ω et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Ω tendant vers x. On va montrer que la suite $(F(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $F(x)$, ce qui suffira à montrer que la fonction F est continue. On a $F(x_n) = \int_I f(t, x_n)\mathrm{d}t$. Posons $\varphi_n(t) = f(t, x_n)$. D'après les hypothèses du théorème, la fonction φ_n est continue par morceaux, $(\varphi_n(t))$ converge vers $\varphi(t)$ pour tout t, $\varphi(t)$ est continue par morceaux et on a l'inégalité

$$|\varphi_n(t)| \leq g(t)$$

pour tout t.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, et on trouve

$$\lim_n F(x_n) = \lim_n \int_I \varphi_n(t)\mathrm{d}t = \int_I \varphi(t)\mathrm{d}t = F(x).$$

□

Passons maintenant à un théorème de *dérivabilité*.

Théorème 5.6.2 (Théorème de dérivabilité sous l'intégrale)**.** *Soit f une fonction définie sur $I \times \Omega$, ou I et Ω sont des intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que*

1. *pour tout t de I, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω ;*
2. *pour tout x de Ω, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
3. *pour tout x de Ω, la fonction $t \mapsto \partial_x f(t,x)$ est continue par morceaux sur I ;*
4. *il existe une fonction g positive, continue par morceaux et intégrable sur I telle que $|\partial_x f(t,x)| \leq g(t)$ pour tout (t,x) de $I \times \Omega$.*

Alors la fonction F définie par

$$F(x) = \int_I f(t,x)\,dx$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$F'(x) = \int_I \partial_x f(t,x)\,dt.$$

Remarquer que les hypothèses 1, 2 et 3 sont seulement des hypothèses servant à donner un sens aux intégrales $\int_I f(t,x)\mathrm{d}x$ et $\int_I \partial_x f(t,x)\mathrm{d}x$.

Noter que pour ce théorème, on n'a pas besoin d'hypothèse de domination sur la fonction f elle-même, mais seulement sur sa dérivée partielle en x.

Démonstration. Tout d'abord, F est bien définie car $t \mapsto f(t,x)$ est supposée intégrable sur I.

Pour montrer le théorème, il suffit de montrer que pour tout x dans Ω et toute suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x + h_n$ soit dans Ω, on a

$$\lim_n \frac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} = \int_I \partial_x f(x,t)\mathrm{d}t.$$

On aura en effet montré que la fonction F est dérivable et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \int_I \partial_x f(t,x)\mathrm{d}t$ qui est continue, au vu du théorème précédent.

On a

$$\frac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} = \frac{1}{h_n}\left(\int_I f(t,x+h_n)\mathrm{d}t - \int_I f(t,x)\mathrm{d}t\right) = \int_I \frac{f(t,x+h_n) - f(t,x)}{h_n}\mathrm{d}t.$$

Posons donc $\psi_n(t) = \frac{f(t,x+h_n)-f(t,x)}{h_n}$. La fonction ψ_n est continue par morceaux, converge simplement vers la fonction continue par morceaux $t \mapsto \partial_x f(t,x)$ et le théorème des accroissements finis montre que

$$|\psi_n(t)| = \left|\frac{f(t,x+h_n) - f(t,x+h_n)}{h_n}\right| \leq \frac{1}{h_n}|h_n| \sup_{\lambda\in[0,1]} |\partial_x f(t,x+\lambda h_n)| \leq g(t).$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, et on en déduit

$$\lim_n \frac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} = \int_I \partial_x f(t,x)\mathrm{d}t,$$

ce qui achève la démonstration. □

Chapitre 6

Suites et séries de fonctions

6.1 Structure de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Pour un intervalle I de $\mathbb{R}$, on notera $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On remarque que l'ensemble $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ hérite de nombreuses propriétés de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$, en évaluant les fonctions en chaque point de l'ensemble de départ.

En effet, on peut définir les opérations et relations suivantes pour des fonctions f et g de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$:

- La somme de deux fonctions est définie par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout x de I ;
- Le produit d'une fonction par un scalaire est défini par $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$;
- Le produit de deux fonctions est défini par $(f.g)(x) = f(x)g(x)$;
- Si la fonction f ne s'annule pas, son inverse est défini par $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$;
- Le maximum de deux fonctions est défini par $\max(f,g)(x) = \max(f(x), g(x))$;
- Le minimum de deux fonctions est défini par $\min(f,g)(x) = \min(f(x), g(x))$.

L'ensemble $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ hérite donc de $\mathbb{R}$ une addition, une multiplication et une structure d'ordre. Les deux premières prorpiétés montrent que l'ensemble $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et la troisième montre qu'il s'agit également d'une $\mathbb{R}$-algèbre. On retiendra les écritures suivantes qui désignent des maximums et minimums de fonctions :

$$f^+ = \max(f,0),\ f^- = -\min(f,0) = \max(-f,0),\ |f| = f^+ + f^- = \max(f,-f).$$

Si f est une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et si g est un fonction définie sur l'ensemble (appelé *image* de f)

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in I,\ y = f(x)\},$$

alors on peut définir la fonction *composée* de f et g, notée $g \circ f$, par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

On peut effectivement appliquer la fonction g à $f(x)$ car $f(x)$ est dans $f(I)$, qui est inclus dans l'ensemble de définition de g.

Un sous-ensemble important de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui sont bornées, noté $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$. Autrement dit

$$\mathcal{B}(I,\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R}) \mid \exists M > 0,\ \forall x \in I,\ |f(x)| \leq M\}.$$

Le sous-ensemble $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est en fait un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

De plus, si I est un segment, toute fonction continue sur I est bornée, de sorte que l'ensemble $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ des fonctions continues sur I sera inclus dans $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$.

Toutes les propriétés qui viennent d'être énoncées restent vraies si l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$, à l'exception de la définition du maximum de deux fonctions, en raison de l'absence de relation d'ordre "naturelle" sur $\mathbb{C}$.

6.2 Convergence d'une suite de fonctions

La notion la plus simple de convergence d'une suite fonctions est la notions suivante.

Définition 6.2.1. *On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$* converge simplement *vers une fonction f si quel que soit le réel x de I, on ait la convergence* $\lim_n f_n(x) = f(x)$.

Toutefois, en pratique cette notion est trop faible. Notamment, elle ne préserve pas la notion de continuité. Par exemple la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $[0,2]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

est une suite de fonctions continues, qui converge simplement vers la limite f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Or on remarque que la fonction f n'est pas continue. On a donc besoin d'une notion de convergence des fonctions qui soit plus forte (c'est-à-dire plus restrictive) pour pouvoir déduire de la continuité à la limite. Cette notion est la notion de convergence *uniforme* :

Définition 6.2.2. *On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$* converge uniformément *vers une fonction f si*

$$\lim_n \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Autrement dit, une suite de fonction converge uniformément si $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ *avec une vitesse indépendante de x*.

La convergence uniforme est effectivement une notion plus forte que la notion de converge simple, comme en atteste la propriété suivante.

Propriété 6.2.3. *Si une suite de fonctions converge uniformément, alors elle converge simplement.*

Démonstration. Soit x un réel de I. On a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \to_n 0.$$

□

La notion de convergence uniforme est importante en analyse car elle préserve la continuité des fonctions. Plus précisément, on a le résultat :

Propriété 6.2.4. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f, alors f est continue.*

Démonstration. Soit ε un réel positif. Par convergence uniforme, il existe un entier n tel que $\sup_I |f_n - f|$ soit inférieur à $\frac{\varepsilon}{3}$. La fonction f_n étant continue, il existe un réel $\eta > 0$ tel que si x et y sont deux éléments de I vérifiant $|x-y| \leq \eta$, alors on a $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. On peut alors conclure en remarquant que si $|x-y| \leq \eta$, on a

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq \varepsilon\frac{\varepsilon}{3} + 2\sup_I |f_n - f| \\ &\leq 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Propriété 6.2.5. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ d'un segment I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que :*

- *la suite de fonctions $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g (qui est par conséquent continue) ;*
- *il existe un $a \in I$ tel que $f_n(a)$ converge.*

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, et sa limite f est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $f' = g$.

Démonstration. On écrit

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(y)\mathrm{d}y.$$

On a alors

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(a) - f_m(a)| + \int_a^x |f'_n(y) - f'_m(y)|\mathrm{d}y \\ &\leq |f_n(a) - f_m(a)| + (x-a)\sup_I |f'_n - f'_m| \\ &\leq |f_n(a) - f_m(a)| + \sup_{x\in I}|x-a| \sup_I |f'_n - f'_m|.\end{aligned}$$

Comme la suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I, on en déduit que

$$\lim_{n,m\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f_m(x)| = 0, \tag{6.1}$$

autrement dit, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy quel que soit x. En conséquence, f_n converge simplement quand n tend vers l'infini vers une limite, que l'on notera $f(x)$. De plus, l'équation (6.1) implique

$$\lim_n \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

de sorte que la convergence simple de f_n vers f est en fait une convergence uniforme.

Il reste maintetant à montrer que f est une fonction dérivable de dérivée g. Pour cela, on écrit, pour $h \geq 0$ (le cas $h < 0$ étant tout à fait symétrique)

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x)\right| &= \lim_n \left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - g(x)\right| \\ &= \lim_n \frac{1}{h}\left|\int_x^{x+h} f_n'(y) - g(y)\mathrm{d}y\right| + |g(y)-g(x)| \\ &\leq \lim_n \sup_I |f_n'(y) - g(y)| + \sup_{y\in[x,x+h]} |g(y)-g(x)| \\ &= 0 + \sup_{y\in[x,x+h]} |g(y)-g(x)|.\end{aligned}$$

Quand h tend vers 0, le terme de droite tend vers 0 en vertu de la continuité de g sur I. □

On peut généraliser ce résultat pour des fonctions k fois dérivables :

Corollaire 6.2.6. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :*

- *la suite de fonctions $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g (qui est par conséquent continue) ;*
- *pour tout q dans $\{0,\dots,k-1\}$, il existe un $a_q \in I$ tel que $(f_n^{(q)}(a_q))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, sa limite f est de classe $\mathcal{C}^k$, et pour tout q dans $\{1,\dots,k\}$ la suite (f_n^q) converge uniformément vers $f^{(q)}$.

Démonstration. Il suffit de raisonner par récurrence sur k en appliquant la propriété précédente. □

Pour les séries, on utilise également le vocabulaire suivant :

Définition 6.2.7. *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I. Si la série (à termes réels) $\sum \sup_{x\in I} |f_n(x)|$ converge, on dit que la série $\sum f_n$ converge* normalement.

Cette notion permet en fait de rapporter la convergence uniforme d'une série de fonction à la convergence d'une suite de réels. En effet, on a l'implication :

Propriété 6.2.8. *Une série de fonction qui converge normalement converge uniformément.*

Démonstration. On considère une série de fonction $\sum f_n$ convergeant normalement. Pour tout x, on a

$$\sum_{n=0}^{N} |f_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{N} \sup_I |f_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sup_I |f_n|.$$

Par conséquent, pour tout x, la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente, et donc convergente. On a alors la majoration, pour $x \in I$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{N} f_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \sum\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\right| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \sup_I |f_n|.\end{aligned}$$

En passant à la borne supérieure en x, on obtient

$$\sup_{x\in I}\left|\sum_{n=0}^{N} f_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \sum\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \sup_I |f_n| \to_N 0,$$

ce qui montre que la convergence est uniforme en x. □

6.2.1 Approximation des fonctions continues

Il peut souvent être utile d'approcher une fonction continue par des fonctions "simples".

Lemme 6.2.9. *Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et ε un réel positif.*

Il existe une fonction g_1 continue et affine par morceaux telle que $\sup_{[a,b]} |f - g_1| \leq \varepsilon$.

Il existe également une fonction g_2 constante par morceaux telle que $\sup_{[a,b]} |f - g_2| \leq \varepsilon$.

Démonstration. Pour simplifier, on supposera que $[a, b] = [0, 1]$ (on peut s'y ramener par un simple changement de variables).

La fonction f étant continue sur un segment, elle est uniformément continue. Par conséquent, étant donné un $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier $n > 0$ tel que si $|x - y| \leq \frac{1}{n}$ on a $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On prend alors comme fonction g_1 la fonction affine par morceaux par rapport à la subdivision $0 < \frac{1}{n} < \ldots < \frac{k-1}{n} < 1$. valant $f\left(\frac{k}{n}\right)$ au point $\frac{k}{n}$ pour chaque entier $k \in \{0, \ldots, n\}$. Si x est un élément de $[0, 1]$, on peut noter k l'entier tel que $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$. On a alors :

$$|f(x) - g_1(x)| \leq \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - g_1\left(\frac{k}{n}\right)\right| + \left|g_1\left(\frac{k}{n}\right) - g_1(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

En effet, $|x - \frac{k}{n}| \leq \frac{1}{n}$, de sorte que $|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et comme g_1 est affine sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on a

$$|g_1(x) - g_1(\frac{k}{n})| \leq \left|g_1\left(\frac{k}{n}\right) - g_1\left(\frac{k+1}{n}\right)\right| = \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a finalement $\sup_{[0,1]} |f - g_1| \leq \varepsilon$.

Pour les mêmes raisons, on pourra vérifier que la fonction g_2 prenant la valeur constante $f(\frac{k}{n})$ sur chaque intervalle de la forme $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ vérifie

$$\sup_{[0,1]} |f - g_2| \leq \varepsilon.$$

□

6.3 Séries entières

Dans cette partie, on va s'intéresser à un cas particulier de série de fonctions qui généralise la notion de polynôme.

Définition 6.3.1. *Une* série entière *est une série de la forme $\sum a_n z^n$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe et z est un élément de $\mathbb{C}$.*

Le point de vue le plus naturel pour étudier les séries entières est de les considérer comme des fonctions définies sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. La forme de l'ensemble sur lequel la série converge a une description simple, comme on va le voir dans la partie suivante.

6.3.1 Rayon de convergence

Théorème 6.3.2. *Pour tout série entière $\sum a_n z^n$, il existe $R \in [0, \infty]$, appelé* rayon de convergence *de la série, tel que $\sum a_n z^n$ diverge si $|z| > R$ et converge si $|z| < R$.*

Pour la preuve de ce résultat, on aura besoin du résultat intermédiaire suivant :

Lemme 6.3.3 (Lemme d'Abel)**.** *Si il existe un nombre complexe z_0 tel que $\sum a_n z_0^n$ converge, alors la série $\sum a_n z^n$ converge pour tout z tel que $|z| \leq |z_0|$.*

Démonstration. Comme la série $\sum a_n z_0^n$ converge, son terme général tend vers 0, ce que l'on peut écrire $a_n = o(|z_0|^{-n})$. Par conséquent, si $|z| \leq |z_0|$, on a

$$|a_n z^n| = \left|a_n z_0 \frac{z}{z_0}\right| = \underbrace{|a_n z_0|}_{=o(1)} \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n = o\left(\left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n\right).$$

Comme $\frac{|z|}{|z_0|} < 1$, on en déduit que $|a_n z^n|$ est majoré par le terme général d'une série géométrique convergente, on l'on en déduit que $\sum a_n z^n$ converge. □

Preuve du théorème (6.3.2)*.* On note $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C},\ \sum a_n z^n \text{ converge}\}$ l'ensemble des points où la série converge. On pose alors $R = \sup\{|z|,\ z \in \mathcal{C}\}$. On va montrer que cette quantité vérifie bien les propriétés énoncées dans le théorème.

Si $|z| > R$ par définition de R, e point z n'est pas dans $\mathcal{C}$, c'est-à-dire que $\sum a_n z^n$ ne converge pas. Si $|z| < R$, il existe un élément z_0 de $\mathcal{C}$ tel que $|z| < |z_0| \leq R$. On applique alors le lemme 6.3.3 : comme la série $\sum a_n z_0^n$ converge, on en déduit que $\sum a_n z^n$ converge, ce qui achève la preuve du théorème. □

Les séries entières peuvent être vues commes des séries de fonctions de la variable z. On a pour l'instant montré une convergence ponctuelle. On va voir que la convergence à en fait lieu d'une manière très forte par rapport à z.

Propriété 6.3.4. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout $0 < r < R$, la série converge uniformément sur le disque $D(0, r)$.*

Démonstration. Pour $z \in D(0, r)$, on a

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n |z|^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n r^n.$$

Ce dernier terme est le reste d'une série convergente, par conséquent, il tend vers 0. On a donc

$$\sup_{z \in D(0,r)} \left|\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n r^n \to_{N\to\infty} 0,$$

ce qui achève la preuve. □

On va maintenant donner quelques moyens pratiques de calculer le rayon de convergence.

Propriété 6.3.5. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont les coefficients sont non nuls à partir d'un certain rang. Si la suite $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ converge, alors sa limite est le rayon de la série.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le critère de d'Alembert à la série $\sum a_n z^n$. En effet, on calcul le rapport

$$\frac{|a_n z^n|}{|a_{n+1} z^{n+1}|} = \frac{1}{z}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}. \tag{6.2}$$

Dans le cas où la suite $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ converge vers une limite R, le rapport (6.2) vers une constante plus grande que 1 si $|z| > R$, et vers une constante plus petite que 1 si $|z| < R$. Le critère de d'Alembert permet de conclure que la série diverge si $|z| < R$ et converge si $|z| > R$. Par conséquent, R est bien le rayon de convergence de la série. □

On peut en fait préciser ce résultat, quitte à obtenir un expression moins explicite.

Propriété 6.3.6. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Le rayon de convergence R de la série est donné par*

$$\frac{1}{R} = \limsup_n |a_n|^{1/n}.$$

Si la limite supérieure ci-dessus est nulle, ce résultat se comprend comme $R = \infty$.

Démonstration. Notons R la quantité $(\limsup_n |a_n|^{1/n})^{-1}$ et montrons qu'il s'agit bien du rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$.

Soit z un nombre complexe avec $|z| < R$ et r un réel vérifiant $|z| < r < R$. On a alors

$$\limsup_n |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R} < \frac{1}{r} < \frac{1}{|z|}.$$

Par conséquent, à partir d'un certain rang, on a l'inégalité $|a_n|^{1/n} < \frac{1}{r}$, de sorte que

$$|a_n z^n| = (|a_n|^{1/n} z)^n < \left(\frac{|z|}{r}\right)^n.$$

Comme $\frac{|z|}{r}$ est plus petit que 1, la série de terme général $\left(\frac{|z|}{r}\right)^n$ converge, et par conséquent, la série de terme général $|a_n z^n|$ converge également. On en déduit que le rayon de convergence de la série est supérieur ou égal à R.

Pour montrer l'égalité, on considère un complexe z avec $R < |z|$. Comme $\limsup_n |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R} > \frac{1}{|z|}$, on a l'inégalité $|a_n|^{1/n} > \frac{1}{|z|}$ pour une infinité de valeurs de n, de sorte que $|a_n z^n| > 1$ pour une infinité de valeurs de n. Il s'en suit que le terme général de la série ne tend pas vers 0, et la série est divergente. □

Définition 6.3.7. *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. On appelle* produit de Cauchy *de ces deux séries la série $\sum c_n z^n$, où la suite c_n est donnée par*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Propriété 6.3.8. *Si deux séries entières ont des rayons de convergence respectifs R_1 et R_2, alors leur produit de Cauchy a un rayon de convergence supérieur ou égal à $R = \min(R_1, R_2)$, et sur le disque de rayon R le produit de Cauchy a pour somme le produit des deux sommes.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 3.4.4. □

On peut trouver des cas où le rayon de convergence du produit est strictement supérieur à chacun des deux rayons. Un exemple est donné par les deux séries

$$\frac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{et} \quad \frac{1-z}{1+z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n.$$

Ces deux séries ont un rayon de convergence de 1, en revanche, leur produit de Cauchy vaut $\frac{1-z}{1+z}\frac{1+z}{1-z} = 1$, qui a donc pour rayon de convergence ∞.

On a de même les propriété suivantes :

Propriété 6.3.9. *Si deux séries entières ont des rayons de convergence respectifs R_1 et R_2, alors leur somme a un rayon de convergence supérieur ou égal à* $\min(R_1, R_2)$.

Démonstration. C'est une réécriture du fait que la somme de deux séries convergente est convergente. □

De même, dans certains cas, le rayon peut être strictement supérieur à R_1 et R_2. Par exemple, la somme des deux séries $\sum n!z^n$ et $-\sum n!z^n$ est nulle et a donc un rayon de convergence infini, alors que les deux séries ont un rayon nul.

À partir d'une série entière, on peut définir, au moins formellement, une série "dérivée" et une série "primitive" :

Lemme 6.3.10. *Si une série entière $s(z) = \sum a_n z^n$ a un rayon de convergence de R, alors sa* série dérivée *$s'(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n z^{n-1}$ et sa* série primitive *$S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont également pour rayon de convergence R.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule $R = (\limsup_n |a_n|^{1/n})^{-1}$. En effet, les inverses des rayons de convergence de la série dérivée et de la série primitive sont donnés respectivement par

$$\limsup_n |(n+1)a_{n+1}|^{1/n} \quad \text{et} \quad \limsup_n |a_{n-1}/n|^{1/n}.$$

Or $(n+1)^{1/n} = e^{\ln(n)/n}$ tend vers 1, ce qui fait que ces deux quantités sont égales à $\limsup_n |a_n|^{1/n}$. □

On fera attention que l'on a pas défini de notion dérivation et de primitivation pour le fonctions définies sur $\mathbb{C}$. Par conséquent, les notation S et s' ne sont que des analogues aux notions de dérivation et de primitivation. En revanche, si on regarde les restrictions des séries entières à $\mathbb{R}$, on obtient des fonctions très régulières.

Propriété 6.3.11. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. En posant $\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, on définit une fonction de $]-R,R[$ dans $\mathbb{C}$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

De plus, la dérivée $k^{\text{ème}}$ s'obtient en dérivant terme à terme :

$$\varphi^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) x^{n-k}.$$

Démonstration. Pour tout N, la fonction φ_N définie par $\varphi_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, puisqu'il s'agit d'un polynôme. De plus, sa dérivée $k^{\text{ème}}$ est donnée par

$$\varphi^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{N} a_n n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) x^{n-k}.$$

qui est une la somme partielle d'une série entière de rayon de convergence R, d'après le lemme 6.3.10. Cette dernière série converge donc uniformément sur tout segment $[-r, r]$ avec $r < R$. Par conséquent, toutes les dérivées de la suite $(\varphi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers les dérivées de φ sur $[-r, r]$. On en déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-r, r]$ et par conséquent sur $]-R, R[$. □

On remarquera que divers comportement sont possibles sur le cercle de convergence. Par exemple, la série $\sum_{n=0}^\infty z^n$ a pour rayon de convergence 1 mais la série ne converge en aucun point du cercle $|z| = 1$ (en effet si $|z| = 1$, le terme général ne tend pas vers 0). À l'opposé, la série $\sum \frac{z^n}{n^2}$ a également un rayon de convergence nul, mais cette fois-ci la série converge pour *tout* les complexes de module 1 (puisqu'alors $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = n^{-2}$ qui est le terme général d'une série convergente). On peut également touver des situations intermédiaire : la série $\sum \frac{z^n}{n}$, de rayon 1 converge en tout les points du cercle unité sauf en $z = 1$ (voir le corrollaire 3.3.4).

6.3.2 Quelles fonctions peuvent se représenter comme des séries entières ?

Définition 6.3.12. *On dit qu'une fonction f est développable en série entière sur un ouvert I de $\mathbb{R}$ si pour tout a de I, il existe un voisinage V de a tel que pour tout x de V, on ait $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x-a)^n$.*

Une question naturelle est de caractériser les fonctions développable en série entière. Une première remarque est que les séries entières définissent des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par conséquent, une fonction développable en série entière est nécessairement de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Inversement, soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I. On se demande si f est développable en série entière. Si c'était le cas, on aurait :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n,$$

et les dérivées successives de f seraient données par

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x-a)^{n-k},$$

Par conséquent, en évaluant l'expression précédente en $x = a$, on aurait $f^{(k)}(a) = k! a_k$. Autrement dit, le seul développement possible pour f est alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Ce développement correspond au développement de Taylor en a de la fonction f au point a, mais ici on ne s'arrête pas à un ordre donné.

En revanche, il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui ne sont pas développable en série entière. Ceci peut arriver pour essentiellement deux rasions :

– Le développement de Taylor de la fonction correspond à une série entière de rayon nul. Par exemple, étant donné une suite de réels quelconques $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est possible de construire une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont la dérivée $n^{\text{ième}}$ en 0 est donnée par a_n (nous ne détaillerons pas la construction). Si f est la fonction ainsi associée à la suite $((n!)^2)_{n\in\mathbb{N}}$, la série de Taylor de f est $\sum_{n=0}^\infty n!z^n$, qui a un rayon de convergence nul.
– La série de Taylor a un rayon de convergence strictement positif, mais la somme de la série diffère de la fonction f. Par exemple, la fonction $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et toutes ses dérivées sont nulles en zéro (exercice !). Sa série de Taylor en 0 est donc la série nulle, qui a un rayon de convergence infini, mais qui ne coïncide pas avec f.

En fait on peut caractériser les fonctions développables en série entière de la manière suivante :

Propriété 6.3.13. *Une fonction $f :]-r,r[\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ est développable en série entière avec un rayon de convergence supérieur à r si et seulement la proposition*

$$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-r,r[,\ |f^{(n)}(x)| \leq \frac{Mn!}{r^n}$$

est vérifiée.

Démonstration. Admis. □

6.3.3 Quelques développement en série entière

On a les développements suivants, donnés avec leur rayon de convergence.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad R = \infty,\ (\text{résolution de } y' = y)$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} z^n, \quad R = \infty,\ (\text{partie imaginaire})$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n!)} z^n, \quad R = \infty,\ (\text{partie réelle})$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad R = 1,\ (\text{série géométrique})$$

$$\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad R = 1,\ (\text{primitivation du précédent})$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad R = 1,\ (\text{substitution dans } \frac{1}{1-z})$$

$$\arctan(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}, \quad R = 1,\ (\text{primitivation du précédent})$$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \quad R = \infty \text{ si } \alpha \in \mathbb{N},\ R = 1 \text{ sinon (série de Taylor).}$$

6.4 Séries de Fourier

On appelle *série trigonométrique* une série de la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}.$$

On remarque que si une série trigonométrique définit une fonction de t (c'est-à-dire si la série converge quel que soit t), alors cette fonction est nécessairement 2π-périodique. La théorie des séries de Fourier tente de répondre à la question inverse : une fonction 2π-périodique peut-elle toujours être représentée par une série de Fourier ?

Observons le calcul non justifié suivant :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{-ikt} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}\mathrm{d}t &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t}\mathrm{d}t \\
&= c_k \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t + \sum_{n\neq k} c_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t}\mathrm{d}t \\
&= 2\pi c_k + \sum_{n\neq k} c_n \left[\frac{e^{i(n-k)t}}{i(n-k)}\right]_0^{2\pi} \\
&= 2\pi c_k + 0. \qquad (6.3)
\end{aligned}$$

On remarque que si une série trigonométrique définit effectivement une fonction, et si tous les calculs précédent sont justifiés, alors les coefficients c_n peuvent être calculés à partir de la fonction par intégration. On est donc amenés à la série suivante.

Définition 6.4.1. *Soit f une fonction 2π-périodique continue par morceaux. On appelle* série de Fourier *associée à f la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}$, avec*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt.$$

On remarquera que le calcul précédent peut être mené sur n'importe quel intervalle de largeur 2π :

Propriété 6.4.2. *Pour une fonction f 2π-périodique continue par morceaux, la quantité $\int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(t)\,dt$ ne dépend pas de x_0.*

Démonstration. On va montrer que l'intégrale sur $[x_0, x_0 + 2\pi]$ est égale à l'intégrale sur $[0, 2\pi]$, ce qui suffit pour démontrer la propriété. Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(t)\mathrm{d}t &= \int_{x_0}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{x_0+2\pi} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{x_0}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{x_0} f(s+2\pi)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

où la deuxième égalité a été obtenue à l'aide du changement de variable $t = s + 2\pi$. $\square$

On remarquera que tout les théorème que nous présenterons resteront valides pour des fonctions T-périodique, pour un T arbitraire. Pour se ramener au cas $T = 2\pi$, il suffira de faire le changement de variables $s = t \times \frac{2\pi}{T}$.

6.4.1 Le cas des séries réelles

Quand on cherche à développer en série de Fourier une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, il est naturel de vouloir une série à termes réels. Le passage des séries à termes complexes au séries à termes réels se fait de la manière suivante : on écrit

$$\begin{aligned} c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int} &= c_n(f)(\cos(nt) + i\sin(nt)) + c_{-n}(f)(\cos(nt) - i\sin(nt)) \\ &= a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt), \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad \text{et} \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)).$$

On peut calculer directement les coefficients a_n et b_n comme intégrales de la fonction f.

$$\begin{cases} a_n(f) &= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t, \text{ pour } n \geq 0, \\ b_n(f) &= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t, \text{ pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Avec ces notations, la série de Fourier de f peut se récrire comme

$$\frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt). \tag{6.4}$$

Certaines conventions définissent $a_0(f)$ avec un facteur $\frac{1}{2\pi}$ au lieu de $\frac{1}{\pi}$. La définition est alors moins symétrique, mais on n'a plus de facteur 1/2 dans l'écriture (6.4). On remarquera qu'il n'y a pas de coefficient $b_0(f)$. Ces particularités viennent du fait que pour $n = 0$, les coefficients $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$ sont confondus.

Tout les théorèmes énoncés seront encore valides pour une série à termes réels : le passage en série à terme réels est un simple changement d'écriture, qui ne modifie pas fondamentalement le comportement de la série.

On pourra remarquer que la parité d'une fonction se traduit par le fait que les coefficients de Fourier sont conjugués, et inversement. Plus précisément :

Propriété 6.4.3. *Soit f une fonction 2π-périodique continue par morceaux.*

- *Si f est une fonction paire, alors $c_n(f) = c_{-n}(f)$, ce qui s'écrit également $b_n(f) = 0$.*
- *Si f est une fonction impaire, alors $c_n(f) = -c_{-n}(f)$, ce qui s'écrit encore $a_n(f) = 0$.*
- *Si f est une fonction réelle, alors $c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$, ce qui se revient à dire que les $a_n(f)$ et les $b_n(f)$ sont réel.*
- *Si f est une fonction imaginaire pure, alors $c_n(f) = -\overline{c_{-n}(f)}$, et les $a_n(f)$ et les $b_n(f)$ sont imaginaires purs.*

Démonstration. Si f est paire, on a $c_n(f(t)) = c_n(f(-t))$. On remarque alors, en faisant le changement de variables $s = -t$, que

$$c_n(f(-t)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(-t)e^{-int}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)e^{int}\mathrm{d}t = c_{-n}(f).$$

Les autres égalités se traitent de façon similaire. □

6.4.2 Structure Hilbertienne

On a un lien très fort entre l'intégrale du carré d'une fonction et la somme des carrés de ces coefficients de Fourier.

Théorème 6.4.4. *Pour une fonction 2π-périodique continue par morceaux, les séries*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^2 \quad et \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(f)|^2$$

*sont convergentes. De plus, on a l'*égalité de Bessel-Parseval

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2.$$

Démonstration. Admis. □

Une conséquence de ce théorème est qu'une fonction est caractérisée par ses coefficients de Fourier.

Corollaire 6.4.5. *Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux 2π-périodiques telles que pour tout n, on ait $c_n(f) = c_n(g)$, alors $f = g$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points).*

Démonstration. Par hypothèse, les coefficients de Fourier de la fonction $f - g$ sont nuls. Par conséquent, l'égalité de Bessel-Parseval nous donne

$$\int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|^2 \mathrm{d}t = 0.$$

Comme $|f-g|^2$ est une fonction positive, cela signifie que f est nulle, sauf en un nombre fini de points. □

6.4.3 Convergence normale

Propriété 6.4.6. *Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit telle que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|$ soit convergente. Alors, la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e^{int}$ converge uniformément vers une fonction f continue dont les coefficients de Fourier sont donnés par*

$$c_n(f) = u_n.$$

Démonstration. L'hypothèse faite sur les coefficients de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ font que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série normalement convergente. Par conséquent, elle converge uniformément, et les termes de la séries étant des fonctions continues, sa somme est une fonction continue.

Dans le cas d'une série convergeant uniformément, le calcul (6.3) est justifié, ce qui achève la démonstration. □

6.4.4 Convergence simple

On définit, pour une fonction continue par morceaux f donnée, la fonction $\tilde{f}$ suivante :

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } f \text{ est continue en } t \\ \frac{f(t-)+f(t+)}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est introduite en vue du résultat suivant :

Théorème 6.4.7 (Dirichlet). *Si f est une fonction 2π-périodique continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la suite de fonctions*

$$s_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int}$$

converge simplement vers $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}$ (ou, de manière équivalente, sur $[0, 2\pi]$).

On prêtera bien attention au fait qu'il faut effectuer la somme de façon symétrique (de $-N$ à N). En effet il existe des fonctions vérifiant les condition du théorème 6.4.7 telle que les deux séries

$$\sum_{n=0}^{N} c_n(f)e^{int} \text{ et } \sum_{n=0}^{N} c_{-n}(f)e^{-int}$$

divergent en certains points. La convergence des suites de $-N$ à N correspond alors à un phénomène de compensation. Autrement dit, la série est convergente, mais pas forcément absolument convergente, de sorte que la limite peut dépendre de l'ordre de sommation. Par exemple, considérons la fonction f 2π-périodique définie par $f(t) = \pi - t$ si $t \in]0, 2\pi[$. On peut vérifier que la développement en série de Fourier de f est donné par

$$\sum_{n\neq 0} \frac{e^{int}}{in}.$$

On remarque que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int}}{in}$ et $\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{e^{int}}{in}$ divergent en $t = 0$.

Pour faire la preuve du théorème de Dirichlet, on va avoir besoin de la notion suivante :

Définition 6.4.8. *Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux 2π-périodiques, on définit leur produit de convolution $f * g$ par la formule*

$$f * g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s)g(t-s)ds.$$

On remarquera que pour tout t, la fonction $s \mapsto f(s)g(t-s)$ est continue par morceaux, de sorte que l'intégrale définissant $f * g$ a bien un sens.

L'intérêt de cette notion dans le cadre des séries de Fourier vient du fait que la somme partielle de la série de Fourier peut s'exprimer comme un produit de convolution, comme expliqué dans la proposition suivante.

Propriété 6.4.9. *Soit f une fonction continue par morceaux et 2π-périodique. On a les égalités*

$$c_n(f)e^{int} = e^{int} * f, \qquad \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int} = \left(\sum_{n=-N}^{N} e^{int}\right) * f.$$

Démonstration. La première égalité est une simple calcul. La deuxième s'obtient à partir de la première grâce à la linéarité du produit de convolution. □

La propriété explique en quoi le comportement asymptotique d'une série de Fourier va être relié à la suite de fonctions $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appellée *noyau de Dirichlet*, définie par

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int}.$$

Propriété 6.4.10. *On a l'expression*

$$D_N(t) = \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \tag{6.5}$$

On remarquera que D_N est une fonction π-périodique.

On remarquera que l'expression (6.5) se prolonge par continuité en 0 puisque

$$D_N(t) = \frac{\left(N+\frac{1}{2}\right)t + o(t)}{\frac{t}{2}+o(t)} = \frac{N+\frac{1}{2}+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)} = 2N+1+o(1).$$

Démonstration. On effectue le calcul, en remarquant que la série définissant D_N est une série trigonométrique.

$$\begin{aligned} D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = \sum_{n=-N}^{N} (e^{it})^n = e^{-iNt}\frac{e^{i(2N+1)t}-1}{e^{it}-1} &= \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}}\frac{e^{iN+\frac{1}{2}t}-e^{-i(N+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}} \\ &= \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

□

Lemme 6.4.11 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** *Soit f une fonction continue par morceaux. Alors la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ tend vers 0 quand n tend vers ∞ ou vers $-\infty$. Plus précisément, on a*

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-i\lambda t}dt = 0.$$

Démonstration. On va commencer par faire la preuve dans le cas ou la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$. On a alors, en intégrant par parties

$$\left|\int_0^{2\pi} f(t)e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{\lambda}\left|\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{\lambda}\sup_{[0,2\pi]}|f'| \to 0.$$

Si f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$, on admettra qu'il est possible de trouver, pour tout $\varepsilon>0$, une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\int_0^{2\pi}|f(t)-g(t)|\mathrm{d}t \leq \varepsilon$. On a alors

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty}\left|\int_0^{2\pi} f(t)e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t\right| &\leq \limsup_{\lambda\to\pm\infty}\left|\int_0^{2\pi} f(t)e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} g(t)e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t\right| + \left|\int_0^{2\pi} g(t)e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \varepsilon + \limsup_{\lambda\to\pm\infty}\left|\int_0^{2\pi} g(t)e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t\right| \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

On conclut par le fait que cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème de Dirichlet.

Preuve du théorème 6.4.7. On a l'égalité

$$\int_0^{2\pi} D_N(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=-N}^{N} \int_0^{2\pi} e^{int}\mathrm{d}t = 2\pi.$$

De plus,la fonction D_N est paire de sorte que l'on puisse écrire

$$\begin{aligned}
2\pi\left(s_N(f)(t) - \tilde{f}(t)\right) &= \int_{-\pi}^{\pi} D_N(s)f(t-s)\mathrm{d}s - \int_{-\pi}^{\pi} D_N(s)\tilde{f}(t)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\pi} D_N(s)f(t-s)\mathrm{d}s + \int_{-\pi}^{0} D_N(s)f(t-s)\mathrm{d}s - \int_{-\pi}^{\pi} D_N(s)\tilde{f}(t)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\pi} D_N(s)f(t-s)\mathrm{d}s + \int_0^{\pi} D_N(s)f(t+s)\mathrm{d}s - \int_0^{\pi} D_N(s)(f(t-)+f(t+))\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\pi} \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)s\right)\left(\frac{f(t+s)-f(t+)}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)} + \frac{f(t-s)-f(t-)}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)}\right)\mathrm{d}s. \qquad (6.6)
\end{aligned}$$

On remarque ensuite que, f étant de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a les développements, en $s > 0$

$$f(t+s) = f(t+) + f'(t+)s + o(s) \quad \text{et} \quad f(t-s) = f(t-) + f'(t-)s + o(s),$$

de sorte que la fonction

$$s \mapsto \frac{f(t+s)-f(t+)}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)} + \frac{f(t-s)-f(t-)}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)}$$

se prolonge par continuité en 0. Il suffit alors et on applique le lemme 6.4.11 pour conclure que le membre de droite de (6.6) tend vers 0. □

6.4.5 Séries de Fourier et dérivabilité

Propriété 6.4.12. *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ 2π-périodique, alors on a l'équation*

$$c_n(f') = inc_n(f).$$

Démonstration. Il s'agit d'une simple intégration par parties :

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t = \left[\frac{f(t)e^{-int}}{-in}\right] + \int_0^{2\pi} f'(t)\frac{e^{-int}}{in}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f'(t)\frac{e^{-int}}{in}\mathrm{d}t.$$

Les termes de bords s'annulent à cause de la 2π-périodicité. □

Cette formule est la raison historique pour laquelle les séries de Fourier on été introduites. En effet, la motivation initiale de Fourier était de résoudre l'équation décrivant l'évolution de la température d'un solide, connue aujourd'hui sous le nom d'*équation de la chaleur*. Cette équation est donnée par

$$\partial_t f(t,x) = \partial_x \partial_x f(t,x),$$

où $f(t,x)$ est la température du solide au point x et à l'instant t et ∂_x et ∂_t désigne la dérivation par rapport à t et x respectivement. Si on suppose que la température est 2π-périodique, on peut développer en série de Fourier la fonction $x \mapsto f(t,x)$, pour tout t fixé. En notant $c_n(t)$ les coefficients de Fourier correspondants, on obtient, grâce à la propriété 6.4.12, l'équation

$$c_n'(t) = -n^2 c_n(t),$$

que l'on sait résoudre explicitement. En résumé, l'équation de la chaleur prend une forme très simple quand on regarde les coefficients de Fourier, ce qui a permis d'étudier ses solutions.

On peut donner une réciproque partielle à la proposition 6.4.12, c'est-à-dire une condition suffisante sur les coefficients de Fourier pour que la fonction soit de classe $\mathcal{C}^1$.

Propriété 6.4.13. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} nu_n$ soit absolument convergente. Alors la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e^{int}$ définit une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$.*

Démonstration. Comme $|u_n| \leq |nu_n|$ dès que $n \neq 0$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e^{inx}$ est elle aussi absolument convergente. Les sommes partielles de cette série sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, dont les dérivées sont les sommes partielles de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} inu_n e^{inx}$, qui est absolument convergente. Il suffit ensuite d'appliquer les propriétés 6.2.5 et 6.4.6 pour conclure. □

Par récurrence, on déduit de la propriété 6.4.13 le corollaire suivant :

Corollaire 6.4.14. *Si la suite u_n vérifie $u_n = o(n^{-k})$ pour tout entier k, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e^{inx}$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Chapitre 7

Équations différentielles

Une équation différentielle est une équation dont la quantité inconnue à déterminer est une fonction, et faisant intervenir des dérivées de cette fonction.

Les équations différentielles permettent de modéliser divers phénomènes physiques. Une question importante du point de vue mathématique est le caractère bien posé de ces équations : l'équation admet-elle une solution ? Cette solution est elle unique ? On sera aussi amenés à calculer des solution approchées.

7.1 Problème de Cauchy

On appelle *problème de Cauchy* une équation de la forme

$$\begin{cases} y'(t) &= f(y(t),t), \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Ici f est une fonction définie sur $\Omega \times I$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On a aussi $t_0 \in I$ et $y_0 \in \Omega$. On est donc en présence d'une équation différentielle et d'une condition initiale.

Définition 7.1.1. *On appelle solution de l'équation* (7.1) *un couple (J, y) où J est un sous-intervalle de I contenant t_0 et y est une fonction dérivable de J dans $\mathbb{R}^n$, tel que l'on ait $y(t_0) = y_0$ et tel que pour tout t de J on ait l'égalité $y'(t) = f(y(t),t)$.*

On peut s'intéresser aux tailles relatives des intervalles I sur lequel f est définie et J sur lequel la solution est définie.

Définition 7.1.2.
- *Étant données deux solutions (J_1, y_1) et (J_2, y_2) de* (7.1)*, on dit que (J_1, y_1)* prolonge *(J_2, y_2) si on a $J_2 \subset J_1$ et si pour tout tout t de J_2, on a $y_1(t) = y_2(t)$.*
- *On dit qu'une solution (J, y) est* maximale *si la seule solution qui prolonge (J, y) est (J, y) elle-même.*
- *On dit qu'une solution (J, y) est* globale *si $J = I$. On remarquera qu'une solution globale est nécessairement maximale.*

Une remarque importante pour la suite est le fait qu'un couple (J, y) est solution de l'équation (7.1) si et seulement si il vérifie l'équation

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(y(s), s)\mathrm{d}s,$$

pour tout t de J.

7.1.1 Existence et unicité des solutions

On va maintenant chercher un cadre d'hypothèses permettant d'assurer l'existence et l'unicité des solutions d'une équation différentielle donnée.

On aura besoin de la définition suivante :

Définition 7.1.3. *On dit qu'une fonction f définie sur $\Omega \times I$ est* localement Lipschitzienne *en espace si pour tout ensemble de la forme $\bar{B}(y_0, r) \times [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ contenu dans $\Omega \times I$, il existe une constante $L > 0$ telle*

$$\forall (y_1, t), (y_2, t) \in B(y_0, r) \times]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[, \ \|f(y_1, t) - f(y_2, t)\| \leq L\|y_1 - y_2\|.$$

La propriété suivante permet de trouver très simplement des fonctions localement Lipschitziennes :

Propriété 7.1.4. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega \times I$. Alors f est localement Lipschitzienne en espace.*

Démonstration. Soit (y, t) un point de $\Omega \times I$ et $\varepsilon > 0$ tel que $V_\varepsilon = \bar{B}(y, \varepsilon) \times [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$ soit contenu dans $\Omega \times I$. Par compacité, la différentielle de f par rapport à y est bornée sur V_ε, par une constante notée L. Alors, par le théorème des accroissements finis, f est L-Lipschitzienne sur V_ε. □

Théorème 7.1.5 (Cauchy-Lipschitz)**.** *On suppose que la fonction f est continue et localement Lipschitzienne en espace. Alors le problème de Cauchy* (7.1) *admet une solution. De plus, si (J_1, y_1) et (J_2, y_2) sont deux solutions, alors y_1 et y_2 coïncident sur $J_1 \cap J_2$.*

Corollaire 7.1.6. *On se place dans les hypothèses du théorème 7.1.5. Alors l'équation* (7.1) *admet une unique solution maximale.*

Démonstration. On considère l'ensemble $\mathcal{S} = \{(J, y) \text{ solution de } (7.1)\}$. On définit alors $\bar{J} = \bigcup_{(J,y)\in\mathcal{S}} J$, et on définit la fonction $\bar{y}$ sur $\bar{J}$ par :

$$\bar{y}(t) = y(t), \text{ où } (J, y) \in \mathcal{S} \text{ est tel que } t \in J.$$

Cette définition a bien un sens, car si (J_1, y_1) et (J_2, y_2) sont deux solutions telles que $t \in J_1 \cap J_2$, le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne que $y_1(t) = y_2(t)$.

Le couple $(\bar{J}, \bar{y})$ est bien une solution maximale de (7.1). En effet, pour tout $t \in \bar{J}$, $\bar{y}$ est égale sur un voisinage de t à une solution de (7.1). Enfin, si $(\tilde{J}, \tilde{y})$ est un prolongement de $(\bar{J}, \bar{y})$, on a $(\tilde{J}, \tilde{y}) \in \mathcal{S}$, de sorte que $\tilde{J} \subset \bar{J}$, et les deux solutions sont alors égales, ce qui montre que $(\bar{J}, \bar{y})$ n'admet pas de prolongement, et est donc maximale. □

Nous allons maintenant passer à la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz. Commençons par remarquer que l'on peut se ramener du cas localement Lispchitzien au cas *globalement* Lipschitzien de la manière suivante.

Lemme 7.1.7. *Soit (y_0, t_0) un point de $I \times \Omega$. Il existe un ensemble de la forme $\bar{B}(y_0, r) \times [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ tel que toute solution (J, y) de (7.1) avec $J \subset [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ soit à valeurs dans $B(y_0, r)$.*

Autrement dit une solution issue de y_0 au temps t_0 ne peut pas s'échapper de la boule $B(y_0, r)$ dans l'intervalle de temps $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. L'ensemble $C = B(y_0, r) \times [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ est appelé pour cette raison *cylindre de sécurité*. L'intérêt de cette notion est que, la fonction f étant localement Lipschitzienne, elle admet une constante de Lipschitz sur C. Par conséquent, toute solution du problème initial satisfait aussi le problème sur l'ensemble C, sur lequel la fonction f est *globalement* Lipschitzienne.

Démonstration. On considère une solution y de l'équation, avec une condition initiale $y(t_0) = y_0$. On peut trouver un réel r tel que l'ensemble $V_r = \bar{B}(y_0, r) \times [t_0 - r, t_0 + r]$ soit contenu dans $\Omega \times I$. Étant continue, la fonction f est bornée sur V_r, par une constante L. Comme la dérivée de y en t est donnée par $f(y(t), t)$, le théorème des accroissements finis donne que pour t dans $[t_0 - r, t_0 + r]$ on a $\|y(t) - y(t_0)\| \leq L|t - t_0|$. On en déduit que si t est dans $[t_0 - \frac{r}{L}, t_0 + \frac{r}{L}]$ et dans $[t_0 - r, t_0 + r]$, on a

$$\|y(t_0) - y(t)\| \leq L|t - t_0| \leq r.$$

On obtient donc le résultat en prenant $\varepsilon = \min\left(\frac{r}{L}, r\right)$. □

Le dernier ingrédient nécessaire pour faire la preuve du théorèm 7.1.5 sera le lemme suivant :

Lemme 7.1.8. *[Lemme de Grönwall] Soit f une fonction de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'inégalité*

$$f(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t f(s) ds \tag{7.2}$$

pour tout $t \in [0, T]$. Alors on a la majoration, pour $t \in [0, T]$

$$f(t) \leq \alpha e^{\beta t}.$$

Démonstration. On remarque tout d'abord que le cas d'égalité dans (7.2) correspond à la formulation intégrale de l'équation $y' = \beta y$, avec condition initiale $y(0) = \alpha$. Cette équation a pour solution $y(t) = \alpha e^{\beta t}$, par conséquent, il est naturel de comparer la fonction $\int_0^t f(s) \mathrm{d}s$ avec la fonction $e^{\beta t}$. On calcule donc

$$\left(e^{-\beta t} \int_0^t f(s) \mathrm{d}s\right)' = e^{-\beta t} \left(f(t) - \beta \int_0^t f(s) \mathrm{d}s\right) \leq e^{-\beta t} \alpha.$$

En intégrant cette inégalité de 0 à t, on obtient

$$e^{-\beta t} \int_0^t f(s) \mathrm{d}s \leq \alpha \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta}.$$

On conclut alors en écrivant

$$f(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t f(s) \mathrm{d}s \leq \alpha + \beta e^{\beta t} \alpha \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} = \alpha e^{\beta t}.$$

□

On peut maintenant finir la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Preuve du théorème 7.1.5. En vertu du lemme 7.1.7, on va faire la preuve du théorème dans le cas où f est globalement Lipschitzienne en espace, de constante de Lipschitz L : il suffit de considérer l'équation restreinte à un cyclindre de sécurité contenant la condition initiale. De plus, par un changement de variables, on se ramène à une équation posée sur $[0,1]$ avec une condition initiale $y(0) = y_0$. Pour être précis, on se place dans un cylindre de sécurité $B(y_0, L) \times [0,1]$.

– Unicité : Considérons deux solutions y et $\tilde{y}$ de l'équation définies sur deux intervalles I et $\tilde{I}$ contenant 0, et montrons qu'elles sont égales sur l'intervalle $I \cap \tilde{I}$. Comme y et $\tilde{y}$ sont solutions, on a
$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq \int_0^t |f(y(s), s) - f(\tilde{y}(s), s)| \mathrm{d}s \leq L \int_0^t |y(s) - \tilde{y}(s)| \mathrm{d}s.$$
On applique alors le lemme 7.1.8 avec $\alpha = 0$ pour obtenir $y(t) = \tilde{y}(t)$ pour tout t de $I \cap \tilde{I}$.

– Existence : Montrons maintenant l'existence de la solution. Pour ce faire, on va utiliser une solution approchée de l'équation (7.1). Tout d'abord on définit la suite $(\bar{y}^n)_{n=0,\ldots,N}$ de la manière suivante :
$$\begin{cases} \bar{y}^0 & = y_0, \\ \bar{y}^{n+1} & = \bar{y}^n + \frac{1}{N} f(\bar{y}^n, \frac{n}{N}) \text{ pour } 0 \leq n \leq N-1. \end{cases}$$
Cette suite est bien définie : il suffit que $\bar{y}^n$ soit dans $B(y_0, L)$ pour que $\bar{y}^{n+1}$ soit bien défini. Or ce fait se vérifie simplement par réccurrence. On définit alors la fonction $\bar{y}^{(N)}$ affine par morceaux sur la subdivision $0 < \frac{1}{N} < \frac{2}{N} < \ldots < 1$ qui vaut $\bar{y}^k$ en $\frac{k}{N}$.
On va maintenant quantifier à quelle point la fonction $\bar{y}^{(N)}$ est une bonne approximation de la solution de (7.1). Pour cela on estime la quantité $e(N,t)$, appelée *ereur de discrétisation* définie par
$$e(N,t) = \left| \bar{y}^{(N)}(t) - y_0 - \int_0^t f(\bar{y}^{(N)}(s), s) \mathrm{d}s \right|.$$
La quentité $e(N,t)$ est nulle pour tout t et seulement si $y^{(N)}$ est solution de l'équation (7.1). On va montrer que $(e(N,t))_{N\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, ce qui permettra de montrer que $(y^{(N)})_{N\in\mathbb{N}}$ tend vers une solution.
$$\begin{aligned} e(N,t) \leq & \sum_{k=0}^{E(Nt)-1} \left| \bar{y}^{(N)}\left(\frac{k+1}{N}\right) - \bar{y}^{(N)}\left(\frac{k}{N}\right) - \int_{\frac{k}{N}}^{\frac{k+1}{N}} f(\bar{y}^{(N)}(s), s) \mathrm{d}s \right| \\ & + \left| \bar{y}^{(N)}(t) - \bar{y}^{(N)}\left(\frac{E(Nt)}{N}\right) - \int_{\frac{E(Nt)}{N}}^t f(\bar{y}^{(N)}(s), s) \mathrm{d}s \right| \\ = & \sum_{k=0}^{E(Nt)-1} \int_{\frac{k}{N}}^{\frac{k+1}{N}} \left| f\left(\bar{y}^{(N)}\left(\frac{k}{N}\right), \frac{k}{N}\right) - f(\bar{y}^{(N)}(s), s) \right| \mathrm{d}s \\ & + \int_{\frac{E(Nt)}{N}}^t \left| f\left(\bar{y}^{(N)}\left(\frac{E(Nt)}{N}\right), \frac{k}{N}\right) - f(\bar{y}^{(N)}(s), s) \right| \mathrm{d}s \\ \leq & \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\frac{k}{N}}^{\frac{k+1}{N}} \left| f\left(\bar{y}^{(N)}\left(\frac{k}{N}\right), \frac{k}{N}\right) - f(\bar{y}^{(N)}(s), s) \right| \mathrm{d}s. \end{aligned}$$
La fonction f est continue sur l'ensemble $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \bar{B}(y_0, r)$, elle y est donc uniformément continue. Fixons un $\eta > 0$, par uniforme continuité, il existe un entier n_0 tel que pour $N \geq n_0$,

si $|t-s| \leq \frac{1}{N}$ et $|z-\tilde{z}| \leq \frac{L}{N}$, on a $|f(z,t)-f(z',s)| \leq \eta$. Par conséquent, pour $N \geq n_0$, on a

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,1]} e(N,t) &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\frac{k}{N}}^{\frac{k+1}{N}} \left| f\left(\bar{y}^{(N)}\left(\frac{k}{N}\right), \frac{k}{N}\right) - f(\bar{y}^{(N)}(s), s) \right| \mathrm{d}s \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\frac{k}{N}}^{\frac{k+1}{N}} \eta \mathrm{d}s \\ &= \eta.\end{aligned}$$

Par conséquent $\sup_{t\in[0,1]} e(N,t)$ tend vers 0 quand N tend vers ∞.
On va montrer que la suite de fonction $y^N(t)$ converge uniformément vers une limite que nous noterons y. Pour cela, on va montrer que pour tout t la suite $(y^N(t))_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
On a

$$\begin{aligned}|y^N(t)-y^M(t)| &\leq |e(N,t)-e(M,t)| + \left|\int_0^t f(y^N(s),s)\mathrm{d}s - \int_0^t f(y^M(s),s)\mathrm{d}s\right| \\ &\leq |e(N,t)| + |e(M,t)| + \int_0^t |f(y^N(s),s) - f(y^M(s),s)|\mathrm{d}s \\ &\leq |e(N,t)| + |e(M,t)| + L\int_0^t |y^N(s)-y^M(s)|\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

On peut alors appliquer le lemme 7.1.8 pour obtenir

$$|y^N(t)-y^M(t)| \leq (|e(N,t)| + |e(M,t)|)e^{Lt}. \tag{7.3}$$

Cette inégalité signifie que la suite $(y^N(t))_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, et converge donc vers une limite $y(t)$. De plus, en passant à la limite $M \to \infty$ dans (7.3), on voit que la convergence est uniforme en t. Par conséquent, la fonction y est continue.
Si on passe à la limite dans

$$\left|y^N(t) - y_0 - \int_0^t f(y^N(s),s)\mathrm{d}s\right| \leq e(N,t),$$

on obtient

$$\left|y(t) - y_0 - \int_0^t f(y(s),s)\mathrm{d}s\right| = 0.$$

La fonction y est donc bien une solution de l'équation (7.1).

□

7.1.2 Quelques exemples

L'équation $y' = y^2$

La fonction $y \mapsto y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$, par conséquent, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique, et cette équation définit une unique solution maximale, pour toute condition initiale. Cherchons cette solution sous la condition $y(0) = \lambda$. Comme la fonction f ne dépend ici pas du temps, on pourra se ramener à partir de là à n'importe quelle condition initiale.

Traitons tout d'abord le cas $\lambda = 0$. On remarque que la fonction nulle $y(t) = 0$ est bien solution de l'équation. Il s'agit donc de l'unique solution de l'équation. De plus, elle est définie sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'elle est globale.

Supposons maintenant $\lambda \neq 0$. Par continuité de la solution y, on sait que y est non nulle au moins sur un voisinage de $t = 0$. (note 1) On peut alors diviser par y sur ce voisinage de 0, où l'on obtient la relation $\frac{y'}{y^2} = 1$. Or $\frac{y'}{y^2} = -\left(\frac{1}{y}\right)'$. En intégrant on a la relation

$$-\frac{1}{y(t)} = -\frac{1}{\lambda} + t.$$

On a donc

$$y(t) = \frac{\lambda}{1 - \lambda t}.$$

Cette solution est définie sur $]\frac{1}{\lambda}, \infty[$ si $\lambda < 0$ et sur $]-\infty, \frac{1}{\lambda}[$ si $\lambda > 0$. Dans les deux cas, la solution maximale n'est pas globale.

L'équation $y' = \sqrt{|y|}$

La fonction $y \mapsto \sqrt{|y|}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, mais pas sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, on aura existence et unicité de la solution de l'équation pour une condition initiale $y(0) = \lambda$ avec $\lambda \neq 0$, jusqu'à un éventuel instant t où $y(t)$ vaudra 0.

En effet, considérons, comme précédemment, la solution de l'équation vérifiant $y(0) = \lambda$ et dont on sait qu'elle ne s'anulle pas sur un voisinage de $t = 0$. On a la relation

$$\frac{y'}{\sqrt{|y|}} = 1,$$

mais $\frac{y'}{\sqrt{|y|}}$ vaut $2\mathrm{signe}(y)\left(\sqrt{|y|}\right)'$, de sorte que, en intégrant, on ait

$$2\sqrt{|y(t)|} = 2\sqrt{|\lambda|} + \mathrm{signe}(y)t.$$

On en déduit l'expression

$$y(t) = \begin{cases} (\frac{t}{2} + \sqrt{\lambda})^2, & \text{défini sur }]-2\sqrt{\lambda}, \infty[\qquad \text{dans le cas } \lambda > 0, \\ -(-\frac{t}{2} + \sqrt{-\lambda})^2, & \text{défini sur }]-\infty, 2\sqrt{-\lambda}[\quad \text{dans le cas } \lambda < 0. \end{cases}$$

On remarque que dans ces deux cas, la fonction peut être prolongée au-delà de son ensemble de définition par la fonction nulle.

En récapitulatif, l'ensemble des solutions de $y' = \sqrt{|y|}$ peut exactement être décrit de la manière suivante : on fixe deux éléments a et b de $[-\infty, \infty]$ avec $a \leq b$, et on pose

$$y_a^b(t) = \begin{cases} -\frac{(t-a)^2}{4} & \text{si } t \leq a \ ; \\ 0 & \text{si } a \leq t \leq b \ ; \\ \frac{(t-b)^2}{4} & \text{si } b \leq t. \end{cases}$$

Alors les solutions de $y' = \sqrt{|y|}$ sont exactement les fonctions de la forme y_a^b, où a et b sont deux éléments de $[-\infty, \infty]$ vérifiant $a \leq b$

(note 1). En fait, on sait même que la solution ne s'annulera jamais : en effet, par unicité, la seule solution qui puisse s'annuler est la solution nulle, mais cette solution ne peut pas vérifier la condition $y(0) = \lambda$.

7.1.3 Le cas des équations d'ordre supérieur

On appelle équation différentielle d'ordre n une équation de la forme

$$y^{(n)} = f(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, t), \tag{7.4}$$

où f est une fonction de $\Omega \times I$ dans $\mathbb{R}^d$, où Ω est une ouvert de $(\mathbb{R}^d)^n$,. La variable y vit ici dans $\mathbb{R}^d$. Il est en fait simple de ramener ce type d'équation à une équation d'ordre 1 en augmentant la dimension du problème. En effetn, on pose $z = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$. La nouvelle variable z vit alors dans $(\mathbb{R}^d)^n = \mathbb{R}^{nd}$.

On remarque alors que la fonction y est solution de l'équation différentielle (7.4) si et seulement si z est solution de

$$z' = f(z, t).$$

On peut alors appliquer les résultats de la partie précédente pour les équations d'ordre 1. On remarque notamment que la condition initiale $z(t_0) = z_0$ se traduira sur y par une condition de la forme

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0^{(1)}, \dots, \quad y(n-1)(t_0) = y_0^{(n-1)}$$

où le n-uplet $(y_0, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n-1)})$.

Par conséquent, un problème de Cauchy sur une équation d'ordre n doit, pour être bien posé, porter sur les valeurs de la fonction et de ses $n-1$ premières dérivées en un point donné.