Université Pierre et Marie Curie
Master IFMA
Cours "Méthodes numériques déterministes"
2013-2014

TP 1 : Équations aux dérivées partielles elliptiques

Exercice 1.
Écrire la méthode des différences finies pour l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} u''(x) = f(x), & x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

On suppose ici que $f(x) = x$. Calculer numériquement la solution approchée obtenue par différences finies et la comparer avec la solution exacte de l'équation. Que remarquez-vous ?

Exercice 2.
On considère toujours l'équation (1)

1. Écrire la méthode des éléments finis $\mathbb{P}^1$ avec pour second membre $f(x) = x^2$, avec N subdivisions en espace. Estimer l'erreur commise en norme $\mathbb{L}^2$ entre la solution approchée et la solution exacte.
2. Recommencer le calcul pour différentes valeurs de N. À l'aide d'une regression linéaire en echelle logarithmique, donner l'ordre de convergence de la solution approchée vers la solution exacte, en fonction de N.
3. Mêmes questions avec pour second membre $f(x) = -|x - \frac{1}{2}|$, puis $f(x) = \mathbf{1}_{[3/4,1]} - 2 \times \mathbf{1}_{[1/2,3/4]}$ et enfin $f(x) = \delta_{1/2}(\mathrm{d}x)$.
4. Mêmes questions en estimant l'erreur dans $\mathbb{H}^1$.
5. Écrire la méthode des éléments finis $\mathbb{P}^2$ pour l'équation (1). Comme précédemment, estimer la vitesse de convergence pour différents seconds membres.

Exercice 3.
Donner la formulation variationnelle associée au problème suivant.

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) = 1, & x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Résoudre le problème par la méthode des éléments finis.

Exercice 4.
Écrire la méthode des différences finies pour l'équation en dimension 2

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + u(x,y) = 0, & x \in]0,1[\times]0,1[, \\ u(0,y) = 0, & y \in]0,1[, \\ u(1,y) = 1, & y \in]0,1[, \\ u(x,0) = x, & x \in]0,1[, \\ u(x,1) = x, & x \in]0,1[. \end{cases}$$

Exercice 5.
Écrire la méthode des différences finies et celle des éléments finis pour l'équation

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Comparer.