Université Pierre et Marie Curie
Master IFMA
Cours "Méthodes numériques déterministes"
2013-2014

Corrigé du TP 1: Équations aux dérivées partielles elliptiques

En complément de cette correction, des scripts Scilab correspondant à chaque exercice sont téléchargeables à l'adresse suivante :
`http://proba.jussieu.fr/pageperso/roux/enseignements/1314/ifma/meth_det.html`

Exercice 1.
On discrétise le segment $[0,1]$ en $\{0, \delta x, 2\delta x, \dots, 1\}$, où $\delta x = \frac{1}{N+1}$ est le pas de temps. On va donner une approximation de $u(n\delta x)$, notée u_n. La méthode des différences finies s'écrit ici, pour $f(x) = x$.

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1}+u_{n-1}-2u_n}{\delta x} = n\delta x, \quad n \in \{1, \dots, N\} \\ u_0 = u_{N+1} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

Les valeurs u_0 et u_{N+1} étant fixées, les inconnues du problème sont les $(u_n)_{n=1,\dots,N}$. L'équation (1) se récrit alors matriciellement comme

$$\frac{1}{\delta x^2} A_N \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \delta x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix}.$$

où l'on a noté

$$A_N = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

On obtient alors le vecteur des $(u_n)_{n=0,\dots,N+1}$ en inversant la matrice A_N.

La solution exacte de l'équation $u''(x) = x$ est $u(x) = \frac{x^3}{6} + ax + b$, et on obtient les constantes a et b à l'aide des conditions au bord, ici $u(x) = \frac{x^3-x}{6}$.

En traçant sur un même graphique la solution approchée et la solution exacte, on remarque que les deux courbes sont extrêmement proches (sous Scilab, l'erreur est de l'ordre de 10^{-17}). En fait, on a vu en cours que la méthode des différences finies est exacte pour un second membre linéaire, ce qui est le cas ici. L'erreur obtenue est donc uniquement due aux erreurs d'arrondi (qui sont bien de l'ordre de 10^{-17} sous Scilab).

Exercice 2.
On pose $\delta x = \frac{1}{N+1}$ et on définit

$$\mathbb{P}_N^1 = \{v \in \mathcal{C}([0,1]),\ \forall n \in \{0, \dots, N\},\ v_{[n\delta x,(n+1)\delta x]} \text{ affine},\ v(0) = v(1) = 0\}, \tag{3}$$

l'espace des fonctions de $\mathbb{H}_0^1(]0,1[)$ affines par morceaux sur la subdivision $0 < \delta x < 2\delta x < \dots < 1$. La méthode des éléments finis consiste à trouver l'unique fonction u_N de $\mathbb{P}_N^1$ vérifiant

$$-\int_0^1 u_N'(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

L'espace $\mathbb{P}_N^1$ étant de dimension finie, il suffit de vérifier que la fonction u_N vérifie (4) si v parcourt une base de $\mathbb{P}_N^1$. La base la plus naturelle pour $\mathbb{P}_N^1$ est la base $(\varphi_n)_{n=1,\dots,N}$, où $\varphi_n(m\delta x)$ vaut 1 si $m = n$ et 0 sinon. En écrivant $u_N = \sum_{n=1}^N \lambda_n \varphi_n$ et en écrivant l'équation (4) pour $v = \varphi_n$, on obtient l'égalité

$$-\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\int_0^1\varphi_n'(x)\varphi_m'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x,$$

ou encore, matriciellement

$$-\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & \lambda_N\end{pmatrix}\frac{1}{\delta x}A_N=\begin{pmatrix}\int_0^1 f(x)\varphi_1(x)\mathrm{d}x & \cdots & \int_0^1 f(x)\varphi_N(x)\mathrm{d}x\end{pmatrix}.$$

On calcule (exactement ou numériquement), pour chaque second membre x^2, $-6\left|x-\frac{1}{2}\right|$, $\mathbf{1}_{[3/4,1]}-2\times\mathbf{1}_{[1/2,3/4]}$ et $\delta_{1/2}$, le vecteur des $\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x$. On peut vérifier que la solution exacte est, pour chacun de ces quatre cas, donnée respectivement par

$$u(x)=\frac{x^4-x}{12},\ u(x)=\frac{1}{8}-\left|x-\frac{1}{2}\right|^3,\ 32u(x)=\begin{cases}5x & \text{sur } [0,\frac{1}{2}]\\ -32x^2+37x-8 & \text{sur } [\frac{1}{2},\frac{3}{4}]\\ 16x^2-35x+19 & \text{sur } [\frac{3}{4},1]\end{cases}\text{ et } u(x)=\frac{1}{4}(|2x-1|-1).$$

(les coefficients de la troisième fonction sont plutôt à calculer numériquement).

Pour les éléments finis $\mathbb{P}^2$, on introduit l'espace

$$\mathbb{P}_N^2=\{v\in\mathcal{C}([0,1]),\ \forall n\in\{0,\dots,N\},\ v_{[n\delta x,(n+1)\delta x]}\text{ polynomiale de degré }\leq 2,\ v(0)=v(1)=0\}.$$

Cet espace est de dimension $2N+1$, et un base naturelle est la base des $(\psi_n)_{n\in\{\frac{k}{2},\ 1\leq k\leq 2N+1\}}$ tels que $\psi_n(m\delta x)=1$ si $m=n$ et 0 sinon, pour m de la forme $m=\frac{k}{2}$, avec $1\leq k\leq 2N+1$. On vérifie que ces conditions définissent bien une unique fonction de $\mathbb{P}_N^2$, en utilisant les deux polynômes $4x(1-x)$, nul en 0 et 1 et valant 1 en $\frac{1}{2}$, et $x(2x-1)$, nul en 0 et $\frac{1}{2}$ et valant 1 en 1. On vérifie alors que la matrice $(\int_0^1\psi_n(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x)_{1\leq n,m\leq N}$ est une matrice pentadiagonale.

Exercice 3.

La formulation variationnelle s'obtient en multipliant par une fonction v quelconque de $\mathbb{H}_0^1(]0,1[)$, en intégrant sur $]0,1[$, puis en intégrant par parties.

$$-\int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 v(x)\mathrm{d}x.$$

On peut bien appliquer Lax-Milgram ici, en notant que la forme bilinéaire à utiliser ici n'est pas symétrique (à cause du terme en $\int u'v$).

La méthode des éléments finis revient ici à trouver la fonction $u_N=\sum_{i=1}^N\lambda_n\varphi_n$ de l'espace $\mathbb{P}_1^N$ vérifiant pour tout $m\in\{1,\dots,N\}$,

$$\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\left(-\int_0^1\varphi_n'(x)\varphi_m'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1\varphi_n'(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x\right)=\int_0^1\varphi_m(x)\mathrm{d}x.$$

Matriciellent, cette équation se récrit

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & \lambda_N\end{pmatrix}\left(\frac{1}{\delta x}A_N+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 1 & 0 & -1 & \ddots & & \vdots\\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0\\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\right)=\delta x\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

et on obtient les $(\lambda_n)_{n=1,\dots,N}$ en résolvant le système.

On peut remarquer que les solutions exactes de $u''(x)+u'(x)=1$ sont donnée par $x+ae^{-x}+b$. Les conditions au bord donnent ici $u(x)=x+\frac{e^{1-x}-e}{e-1}$.

Exercice 4.

On discrétise l'espace $[0,1]\times[0,1]$ en $\{0,\delta x,2\delta x,\dots,1\}\times\{0,\delta x,2\delta x,\dots,1\}$, avec $\delta x=\frac{1}{N+1}$. La méthode des différences finies s'écrit ici

$$-\frac{1}{\delta x^2}\left(u_{n,m+1}+u_{n,m-1}+u_{n+1,m}+u_{n-1,m}-4u_{n,m}\right)+u_{n,m}=0,$$

pour $1 \leq n, m \leq N$, avec les conditions au bord

$$\begin{cases} u_{0,m} = 0, & 1 \leq m \leq N, \\ u_{N+1,m} = 1, & 1 \leq n \leq N, \\ u_{n,0} = n\delta x, & 1 \leq n \leq N, \\ u_{n,N+1} = n\delta x, & 1 \leq n \leq N. \end{cases}$$

Les inconnues sont ici les $u_{n,m}$ avec $1 \leq n, m \leq N$, ce qui donne un système linéaire de taille N^2. Plus précisément, on a

$$\left(\frac{1}{\delta x^2} B_N + I_{N^2}\right) U + \frac{1}{\delta x^2} F = 0$$

où

- B_N est la matrice définie par blocs par

$$B_N = \begin{pmatrix} C_N & I_N & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ I_N & C_N & I_N & \ddots & & \vdots \\ 0 & I_N & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & I_N & 0 \\ \vdots & & \ddots & I_N & C_N & I_N \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I_N & C_N \end{pmatrix}, \text{ avec } C_N = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -4 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

  et où I_N est la matrice identité de taille N ;
- I_{N^2} est la matrice identité de taille N^2 ;
- U est le vecteur inconnu

$$U = (((u_{n,1})_{n=1,\ldots,N}, (u_{n,2})_{n=1,\ldots,N}, \ldots, (u_{n,N})_{n=1,\ldots,N})^T ;$$

- F correspond au termes de bord apparaissant dans le calcul du Laplacien discret :

$$F = \delta x\, ((1, \ldots, N), 0, \ldots, 0, (1, \ldots, N))^T + ((0, \ldots 0, 1), \ldots, (0, \ldots 0, 1))^T .$$

Dans le fichier `.sci` joint, on a résolu le problème $-u''(x) + 20u(x) = 0$ dont la solution est plus visuelle que celle de l'équation proposée initialement.

Exercice 5.
On note $U = (u_i)_{i=1,\ldots,N}$ le vecteur des valeurs approchées de la fonction u en $i\delta x$. La méthode des différences finies donne ici

$$\left(-\frac{1}{\delta x^2} A_N + I_N\right) U = F,$$

où A_n est la matrice définie en (2), I_N est la matrice identité et $F = (f(i\delta x))_{i=1,\ldots,N}$. La méthode des éléments finis s'écrit

$$\left(-\frac{1}{\delta x} A_N + J_N\right) U = \tilde{F}$$

où J_N est définie par

$$J_N = \left(\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x\right)_{1 \leq i,j \leq N} = \frac{\delta x}{3} \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} & 0 \\ \vdots & & \ddots & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix},$$

et $\tilde{F} = (\int_0^1 \varphi_i(x) f(x)\mathrm{d}x)$. On remarquera que $I_N \simeq \frac{1}{\delta x} J_N$ (du moins si on applique ces matrices à des vecteurs dont les coefficients varient peu, ce qui doit être le cas de U) et $F \simeq \frac{1}{\delta x}\tilde{F}$. On voit que le terme correspondant à la dérivée seconde est le même pour les deux méthodes (outre un facteur δx entre les deux équations), mais que le terme d'ordre 0 et le second membre sont différents (mais proches asympotiquement).