Université Pierre et Marie Curie
Master IFMA
Cours "Méthodes numériques déterministes"
2013-2014

TP 2 : Équations aux dérivées partielles paraboliques

Exercice 1.
On considère l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x), & x \in]0,1[, \\ u(t,0) = a, & t > 0, \\ u(t,1) = b, & t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

pour une condition initiale u_0 quelconque.

1. Écrire le schéma d'Euler explicite pour l'équation (1). On commencera par le cas $a = b = 0$. Observer les différents comportement possibles en fonction de la valeur du pas de temps.
2. Écrire le schéma d'Euler implicite, puis le schéma de Crank-Nicolson associés à l'équation (1). On commencera encore par le cas $a = b = 0$.

Exercice 2.
On résoud ici l'équation de la chaleur par une méthode spectrale. On considère l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x), & t > 0,\ x \in]-\pi,\pi[, \\ u(t,\pi) = u(t,-\pi) = 0, & t \geq 0, \\ u(0,\cdot) = \delta_{1/2} - \delta_{-1/2} - \mathrm{signe}(\cdot). \end{cases} \tag{2}$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de la mesure $\delta_{1/2} - \delta_{-1/2} - \mathrm{signe}(x)\mathrm{d}x$;
2. Comment se récrit l'équation au dérivées partielles (2) sur les coefficients de Fourier $(\gamma_n(t))_{t\geq 0,\ n\in\mathbb{N}}$ de la fonction $x \mapsto u(t,x)$?
3. Calculer les $(\gamma_n(t))_{t\geq 0,\ n\in\mathbb{N}}$.
4. Calculer numériquement la fonction u.
5. Quel est le comportement asymptotique de $u(t,x) \times \|u(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2}^{-1}$? de $\|u(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2}$?

Exercice 3.
Écrire le schéma d'Euler explicite pour l'équation en dimension 2

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u(x,y), & x \in]0,1[\times]0,1[,\ t > 0 \\ u(0,y) = 0, & y \in]0,1[, \\ u(1,y) = 1, & y \in]0,1[, \\ u(x,0) = x, & x \in]0,1[, \\ u(x,1) = x, & x \in]0,1[, \end{cases}$$

avec une condition initiale u_0 donnée. Sous quelle conditions sur le pas d'espace et le pas de temps ce schéma est-il stable ?

Exercice 4.
On pose $V(x) = -(x^2-1)^2$, et on s'intéresse à l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x) + \partial_x(u(t,x)V'(x)) & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \mathbf{1}_{x\in[-0.5,0.5]} & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3}$$

1. Vérifier que (3) peut se récrire

$$\partial_t u(t,x) = \partial_x(e^{-V(x)}\partial_x(u(t,x)e^{V(x)})).$$

   En déduire que la fonction $u(t,x) = e^{-V(x)}$ est une solution stationnaire de (3).

2. On note $w(t,x) = u(t,x)e^{V(x)}$. Donner une formulation variationnelle dans[1] $\mathbb{H}^1(e^{-V(x)}\mathrm{d}x)$ de l'équation vérifiée par w.

3. Résoudre l'équation à l'aide d'une méthode d'éléments finis dont on aura montré la stabilité.

[1] $\mathbb{H}^1(e^{-V(x)}\mathrm{d}x)$ est l'ensemble des fonction de $\mathbb{L}^2(e^{-V(x)}\mathrm{d}x)$ dont la dérivée est dans $\mathbb{L}^2(e^{-V(x)}\mathrm{d}x)$.