Université Pierre et Marie Curie
Master IFMA
Cours "Méthodes numériques déterministes"
2013-2014

Corrigé du TP 2 : Équations aux dérivées partielles paraboliques

En complément de cette correction, des scripts Scilab correspondant à chaque exercice sont téléchargeables à l'adresse suivante :
`http://proba.jussieu.fr/pageperso/roux/enseignements/1314/ifma/meth_det.html`

Exercice 1.

1. Le schéma d'Euler s'écrit
$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\delta t}{\delta x^2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n).$$
On a vu en cours que ce schéma est stable pour $\frac{\delta t}{\delta x^2} \leq 0.5$. Quand cette condition est réalisée, la solution approchée est proche de la solution exacte. Dans le cas contraire, la solution approchée présente vite de grandes oscillations, et finit par exploser.

2. Les schémas d'Euler implicite et de Crank-Nicolson s'écrivent respectivement
$$u_j^n - \frac{\delta t}{\delta x^2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n) = u_j^n$$
et
$$u_j^n - \frac{\delta t}{2\delta x^2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n) = u_j^n + \frac{\delta t}{2\delta x^2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n).$$
La solution se calcule en inversant la matrice $I + \lambda A$, où A est la matrice tridiagonale de taille N avec des -2 sur la diagonale et des 1 sur les sur- et sous-diagonales, et où λ est donné par $\frac{\delta t}{\delta x^2}$ (Euler implicite) ou $\frac{\delta t}{2\delta x^2}$ (Crank-Nicolson).

Exercice 2.

1. La fonction u étant paire, on peut en écrire un développement de Fourier sous forme de somme de sinus. Les coefficients sont donnés par
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)u_0(\mathrm{d}x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)u_0(\mathrm{d}x) &= \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1-(-1)^n}{n\pi}.\end{aligned}$$

2. Les coefficients de Fourier de f'' valent $-n^2 c_n(f)$ où $c_n(f)$ désigne le $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de f. Par conséquent, on obtient l'équation
$$\begin{cases}\gamma_n'(t) = -n^2\gamma_n(t), & t \geq 0,\ n \in \mathbb{Z} \\ \gamma_n(0) = \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1-(-1)^n}{n\pi}, & n \in \mathbb{Z}.\end{cases}$$

3. On obtient $\gamma_n(t) = \left(\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right)e^{-n^2 t}$.

4. La fonction u peut s'obtenir par une somme tronquée de la série
$$u(t,x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1-(-1)^n}{n}\right)e^{-n^2 t}\sin(nx). \tag{1}$$

5. On voit que le terme dominant de la série (1) est le terme de rang $n = 1$. Ce terme est équivalent à $\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)e^{-t}$.

Exercice 3. En dimension 2, le schéma d'Euler explicite est donné par

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \frac{\delta t}{\delta x^2}(u_{i+1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j-1}^n - 4u_{i,j}^n).$$

Pour démontrer la stabilité du schéma dans $\mathbb{L}^\infty$, on remarque que, si (i_0, j_0) est tel que $\max |u_{i,j}^n| = |u_{i_0,j_0}^n|$, alors

$$\max_{i,j} |u_{i,j}^{n+1}| = |u_{i_0,j_0}^{n+1}| = \left|(1 - 4\frac{\delta t}{\delta x^2})u_{i_0,j_0}^n + \frac{\delta t}{\delta x^2}(u_{i_0+1,j_0}^n + u_{i_0,j_0+1}^n + u_{i_0-1,j_0}^n + u_{i_0,j_0-1}^n)\right|.$$

Si $1 - 4\frac{\delta t}{\delta x^2} \geq 0$, on peut alors écrire

$$\max_{i,j} |u_{i,j}^{n+1}| = |u_{i_0,j_0}^{n+1}| = (1 - 4\frac{\delta t}{\delta x^2}) \max_{i,j} |u_{i,j}^n| + 4\frac{\delta t}{\delta x^2} \max_{i,j} |u_{i,j}^n| = \max_{i,j} |u_{i,j}^n|,$$

et le schéma est stable. La condition de stabilité $\mathbb{L}^\infty$ est donc $4\delta t \leq \delta x^2$.