Université Pierre et Marie Curie
Master IFMA
Cours "Méthodes numériques déterministes"
2013-2014

TP : Équations de transport, interprétation probabiliste

Exercice 1.
On veut résoudre numériquement l'équation

$$\partial_t u(t,x) + \lambda \partial_x u(t,x),\ \forall t > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

où on suppose $\lambda > 0$. On considère la condition initiale $u_0(x) = \max(1 - |x|, 0)$. On se donne des pas d'espace et de temps $\delta x > 0$ et $\delta t > 0$. Simuler les schémas suivant, en discutant leur stabilité (à chaque fois, on prend la condition initiale $u_j^n = u_0(j\delta x)$) :

- schéma centré
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} + \lambda \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\delta x} = 0\ ;$$
- schéma décentré droit
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} + \lambda \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\delta x} = 0\ ;$$
- schéma décentré gauche
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} + \lambda \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\delta x} = 0\ ;$$
- schéma de Lax-Wendroff
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} + \lambda \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\delta x} = \lambda \delta t \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\delta x^2}.$$

Exercice 2.
On veut résoudre numériquement l'équation de Black-Scholes

$$\partial_t u(t,s) + \frac{\sigma^2 s^2}{2} \partial_s^2 u(t,s) + rs\partial_s u(t,s) - ru(t,s) = 0,\ \forall t \in]0,T[,\ \forall s > 0,$$

avec la condition finale $u(T,s) = (K-s)^+ \overset{\text{déf}}{=} \max(K-s, 0)$. La constante r est supposée > 0. On va utiliser le schéma

$$\begin{cases} \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\delta t} + \frac{(\sigma j \delta s)^2}{2} \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\delta s^2} + rj\delta s \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\delta s} - ru_j^n = 0, & \forall n \in \{0,\dots,N\},\ \forall j \in \{0,\dots,M-1\}, \\ u_j^N = (K - j\delta s)^+, & \forall j \in \{0,\dots,M\}, \\ u_M^n = 0, & \forall n \in \{0,\dots,N\}. \end{cases}$$

avec $\delta t = T/N$ et $\delta s > 0$, avec $M\delta s > K$. Expliquer pourquoi ce schéma est naturel, qu'il définit bien une unique suite $(u_j^n)_{j\in\{0,\dots,M\},\ n\in\{0,\dots,N\}}$ et étudier sa stabilité. Le simuler pour calculer une approximation de $(u(0,s))_{s\geq 0}$.