Université Pierre et Marie Curie
Master IFMA
2012-2013

Méthodes numériques déterministes : examen
Durée : 2 heures

Les notes de cours ne sont pas autorisées. Il n'est pas nécessaire de traiter la totalité du sujet pour obtenir la note maximale.

Exercice 1.
On considère l'équation de la chaleur avec coefficient de diffusion $\sigma(x) > 0$ non-constant :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \sigma^2(x)\Delta u(t,x) & (t,x) \in [0,\infty[\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

La fonction σ est supposée suffisamment régulière pour que l'équation (1) ait une unique solution. On suppose également que la fonction σ est bornée : il existe une constante $\overline{\sigma}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $0 < \sigma(x) \leq \overline{\sigma}$.

On va discrétiser cette équation par la méthode des différences finies en utilisant des pas de discrétisation en espace $\delta x > 0$ et en temps $\delta t > 0$. On approche alors l'ensemble $[0,\infty[\times\mathbb{R}$ par la grille $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$. Désignons par u_j^n une approximation de la solution au point $(n\delta t, j\delta x)$, de sorte que $u_j^n \simeq u(n\delta t, j\delta x)$. De même, notons $\sigma_j = \sigma(j\delta x)$, pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

Pour une variable $\theta \in [0,1]$ donnée, on s'intéresse au *θ-schéma* associé à l'équation (1), donné par

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\delta t} = \sigma_j(1-\theta)\frac{u_{j+1}^n+u_{j-1}^n-2u_j^n}{\delta x^2} + \sigma_j\theta\frac{u_{j+1}^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}-2u_j^{n+1}}{\delta x^2} & (n,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}, \\ u_j^0 = g(j\delta x) & j \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{2}$$

On appellera *matrice tridiagonale infinie* toute application A qui à une suite $(w_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ associe la suite $(Aw_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ définie par

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ Aw_j = a_j w_j + b_j w_{j+1} + c_j w_{j-1},$$

où les trois suites $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, $(b_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ et $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ sont bornées, de sorte que si $(w_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est une suite bornée, alors $(Aw_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est également une suite bornée.

L'application identité sera notée I : pour toute suite $(w_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, on a $Iw_j = w_j$.

1. Montrer qu'il existe deux matrices tridiagonales infinies A et B telles que le schéma (2) se récrive

$$Au^{n+1} = Bu^n.$$

   On montrera que les matrices A et B peuvent s'exprimer sous la forme

$$A = I + 2\theta D - \theta N \quad \text{et} \quad B = I + 2(1-\theta)D - (1-\theta)N,$$

   où les matrices D et N ont la forme

$$Dw_j = \alpha_j w_j \quad \text{et} \quad Nw_j = \alpha_{j+1}w_{j+1} + \alpha_{j-1}w_j.$$

   On donnera la valeur des coefficients α_j.

2. Montrer que les coefficients α_j sont bornés : il existe une constante $\overline{\alpha}$ telle que l'inégalité $0 < \alpha_j \leq \bar{\alpha}$ soit vérifiée quel que soit $j \in \mathbb{Z}$.

3. Pour quelles valeurs de θ ce schéma est-t-il implicite ? explicite ?

4. Montrer que la matrice $I + 2\theta D$ est inversible et que la matrice $M = (I + 2\theta D)^{-1}\theta N$ prend la forme

$$Mw_j = \beta_{j+1}w_{j+1} + \beta_{j-1}w_{j-1},$$

   où l'on explicitera les coefficients β_j.

5. Montrer qu'il existe une constante $\overline{\beta} < \frac{1}{2}$ telle que pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on ait $\beta_j \leq \overline{\beta}$. En déduire que la matrice $P = \sum_{n=0}^{\infty} M^n$ est bien définie et que $(I - M)P = I$ (on pourra chercher à majorer les coefficients de la matrice M^n). On remarquera que les coefficients de P sont positifs.

6. Montrer que la matrice A est inversible. En déduire qu'il existe une unique famille $(u_j^n)_{n,j \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}}$ vérifiant les relations (2).

7. On s'intéresse à la propriété de monotonie du schéma (2), c'est-à-dire au fait que le schéma vérifie la propriété
$$\forall j \in \mathbb{Z},\ u_j^n \leq v_j^n$$
dès lors que $\forall j \in \mathbb{Z},\ v_j^0 \leq u_j^0$.

8. Montrer que la monotonie du schéma est équivalente à la positivité du schéma, c'est-à-dire à la propriété
$$(\forall j \in \mathbb{Z},\ u_j^0 \geq 0) \Rightarrow (\forall j \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_j^n \geq 0).$$

9. Montrer que si $\theta = 1$, alors le schéma est monotone.

10. (a) On suppose maintenant $\theta < 1$. Montrer que le schéma est monotone si et seulement si l'inégalité
$$p_{i,j-1}\beta_{j-1} + p_{i,j+1}\beta_{j+1} + p_{i,j}\left(\frac{\theta}{(1+2\theta\alpha_j)(1-\theta)} - 2\beta_{i,j}\right) \geq 0 \tag{3}$$
est vraie pour tout couple $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$.

    (b) Montrer la relation
$$p_{i,j-1}\beta_{j-1} + p_{i,j+1}\beta_{j+1} = \begin{cases} p_{i,j} - 1 & \text{si } i = j, \\ p_{i,j} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

    (c) Montrer que la condition (3) est forcément vérifiée dans le cas $i \neq j$.

    (d) En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour la monotonie du schéma est l'inégalité
$$\alpha_j \leq \frac{1}{2\theta(1-\theta)} + \frac{p_{i,i} - 1}{2\theta(1-\theta)}.$$

Exercice 2.
Soit Ω un ouvert *borné* de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction appartenant à $\mathbb{L}^2(\Omega)$. On veut résoudre l'équation suivante, dite *équation de Poisson*
$$\Delta u(x) = f(x),\ x \in \Omega, \tag{4}$$
où $\Delta = \partial_1^2 + \ldots + \partial_n^2$ désigne l'opérateur de Laplace.

1. Montrer que si cette équation admet une solution (en un sens quelconque), cette solution ne peut pas être unique (on pourra considérer l'équation $\Delta u = 0$).

2. (a) Montrer l'*inégalité de Poincaré* suivante : il existe une constante C telle que pour toute fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, continue sur $\overline{\Omega}$ et nulle sur $\partial\Omega$, on a
$$\int_\Omega |\varphi(x)|^2 \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega |\varphi'(x)|^2 \mathrm{d}x. \tag{5}$$
On pourra utiliser l'intégration par parties $\int_\Omega |\varphi(x)|^2 \mathrm{d}x = -2\int_\Omega x_1\varphi(x)\partial_1\varphi(x)\mathrm{d}x$.
Montrer que l'inégalité (5) reste vraie si φ est seulement supposée être dans $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

    (b) En déduire que l'application $\varphi \mapsto \int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2 \mathrm{d}x$ est une norme sur l'espace[1] $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Notamment, la forme bilinéaire $(\varphi,\psi) \mapsto \int_\Omega \nabla\varphi(x)\nabla\psi(x)\mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

3. (a) Donner une formulation variationnelle de l'équation (4) à l'aide du produit scalaire défini en question 2.(b).

    (b) En déduire qu'il existe une unique solution pour l'équation (4) dans l'espace $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

[1] On rappelle que l'espace $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ dont le gradient est dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et qui sont nulles sur $\partial\Omega$.

4. Montrer que si g est la restriction à $\partial\Omega$ d'une fonction de $\mathbb{H}^1(\Omega)$, alors il existe dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ une unique solution au problème (4) muni de la contrainte

$$u(x) = g(x),\ x \in \partial\Omega.$$

5. *Application en probabilités :* On considère un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ et une partie Γ de $\partial\Omega$.

   On considère un mouvement Brownien standard $(W_t)_{t\geq 0}$ issu d'un point x de Ω. L'ouvert Ω étant borné, le temps de sortie de Ω pour $(W_{t\geq 0})$, défini par

$$T = \inf\{t \geq 0,\ W_t \notin \Omega\},$$

   est presque sûrement fini. De plus, on a alors $W_T \in \partial\Omega$.

   En applicant la formule d'Itō au processus $(u(W_t))_{t\geq 0}$, où u est la solution de l'équation

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega, \\ u(x) = 1 & \text{si } x \in \Gamma, \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \setminus \Gamma, \end{cases}$$

   montrer que la fonction u correspond à la probabilité que $(W_t)_{t\geq 0}$ quitte l'ouvert Ω par Γ.

   On supposera Ω et Γ suffisamment réguliers pour que u soit de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 3.
On considère l'équation suivante, appelée *équation de Schrödinger* :

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) = \Delta u(t,x) & (t,x) \in]0,\infty[\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{6}$$

où $i^2 = -1$. La fonction g est une fonction supposée 2π-périodique à valeurs dans $\mathbb{C}$. On cherche une solution u qui soit également 2π-périodique par rapport à la variable x.

1. En développant $u(t,\cdot)$ et g en séries de Fourier,

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t)e^{inx},\ \text{et } g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^0 e^{inx},$$

   récrire l'équation (6) sur les coefficients c_n, sous la forme d'une équation différentielle ordinaire avec une condition initiale.

2. En déduire que les coefficients de Fourier d'une éventuelle solution u sont uniquement déterminés par les valeurs c_n^0.

On a donc unicité de la solution "formelle" de l'équation (6) sous forme de série de Fourier. On cherche maintenant à savoir si cette écriture définit une vraie solution.

3. Montrer que si la condition initiale g est dans[2] $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$, alors il existe une unique solution u dans $\mathcal{C}([0,\infty[,\mathbb{H}^s(\mathbb{T}))$ à l'équation (6). Montrer que si g n'est pas dans $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$, alors la solution formelle trouvée à la question 2 n'est pas dans $\mathcal{C}([0,\infty[,\mathbb{H}^s(\mathbb{T}))$.

   Que signifie ce résultat en termes d'évolution de la régularité de la fonction u ?

4. Écrire la formulation variationnelle associée à cette équation, à l'aide d'une fonction test φ.

5. On suppose que la condition initiale g est dans l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$. Montrer que la norme $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ de la solution (c'est-à-dire la quantité $\int_0^{2\pi} |u(t,x)|^2 \mathrm{d}x$) est constante avec le temps.

On cherche à discrétiser l'équation (6) par une méthode de différences finies. On considère donc un pas d'espace δx et un pas de temps δt. On cherche une approximation $u_j^n \simeq u(j\delta x, n\delta t)$. On pose alors

$$\begin{cases} i\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\delta t} = \frac{u_{j+1}^n+u_{j-1}^n-2u_j^n}{\delta x^2}, & (n,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z} \\ u_j^0 = g(j\delta x) & j \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{7}$$

Pour préserver la propriété de périodicité, on choisit le pas d'espace sous la forme $\delta x = 2\pi/M$, pour un certain entier $M > 0$.

[2] On rappelle que l'espace $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ est défini par $\mathbb{H}^s(\mathbb{T}) = \{\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx},\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 n^{2s} < \infty\}$.

6. Montrer que $u^n_{j+M} = u^n_j$ quel que soit $(n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.

On va passer en Fourier pour étudier le schéma : pour une suite $(w_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ M-périodique en j, on définit la suite "duale" $(\widehat{w}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ définie par

$$\widehat{w}_k = \sum_{j=1}^{M} w_j e^{i2\pi\frac{jk}{M}},\ k \in \mathbb{Z}.$$

7. Exprimer $(\widehat{u^{n+1}_k})_{k\in\mathbb{Z}}$ en fonction de $(\widehat{u^n_k})_{k\in\mathbb{Z}}$. En déduire l'expression générale de $(\widehat{u^n_k})_{k\in\mathbb{Z}}$ en fonction de $(\widehat{u^0_k})_{k\in\mathbb{Z}}$.

8. Montrer l'égalité

$$\sum_{k=1}^{M} |\widehat{w}_k|^2 = M \sum_{j=1}^{M} |w_j|^2.$$

9. Quelle est la limite en $n \to \infty$ de la suite $\left(\sum_{j=1}^{M} |u^n_j|^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

10. Pourquoi le schéma aux différences finies (7) n'est-il pas satisfaisant pour cette équation ?