Université Pierre et Marie Curie
Master IFMA
2012-2013

Méthodes numériques déterministes : session de rattrapage
Durée : 2 heures

Les notes de cours ne sont pas autorisées.

Exercice 1.
On va s'intéresser à des schémas aux différences finies pour l'équation de la chaleur, avec différentes conditions aux bords. On considère donc l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \Delta u(t,x), & (t,x) \in]0,\infty[\times]0,1[, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in]0,1[, \end{cases} \tag{1}$$

avec une des trois conditions suivantes

$$\begin{array}{ll} (\mathbf{D}) & \forall t \geq 0,\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \\ (\mathbf{N}) & \forall t \geq 0,\ \partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,1) = 0, \\ (\mathbf{P}) & \forall t \geq 0,\ u(t,0) = u(t,1) \text{ et } \partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,1). \end{array}$$

On discrétise l'équation (1) par le schéma numérique

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\delta x^2},\ (n,j) \in \mathbb{N} \times A_N, \tag{2}$$

où δt est le pas de discrétisation en temps et δx le pas de discrétisation en espace. On supposera que δx est de la forme $\delta x = \frac{1}{N}$, pour un certain entier naturel N. L'ensemble A_N est un certain ensemble fini, correspondant à une discrétisation de $[0,1]$.

1. Montrer que le schéma (2) peut se récrire en utilisant, suivant la condition (**D**), (**N**) ou (**P**) choisie, une des matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

dont les tailles sont respectivement N, N et $N-1$. On précisera à quelle condition au bord correspond chaque matrice.

2. Montrer que les trois matrices précédentes ont leurs valeurs propres dans l'intervalle $[-4,0]$. On pourra chercher les vecteurs propres sous la forme $\left(\cos\left(\frac{(2j+1)k\pi}{2N}\right)\right)_{j\in A_N}$, $\left(\sin\left(\frac{jk\pi}{N}\right)\right)_{j\in A_N}$, ou $\left(e^{i\frac{2jk\pi}{N}}\right)_{j\in A_N}$, pour des valeurs de k bien choisies.

3. On dit que le schéma est *stable* si la norme l^2 du vecteur $u^n = (u_j^n)_{j\in A_N}$ est décroissante (par rapport à n) quelle que soit la condition initiale. Déduire de la question précédente qu'il existe une valeur $c_N \geq \frac{1}{2}$ telle que le schéma soit stable si et seulement si $\frac{\delta t}{\delta x^2} \leq c_N$. On précisera la valeur de c_N, qui dépend de la condition au bord (**D**), (**N**) ou (**P**) choisie.

4. (a) Écrire le schéma *implicite* associé au schéma (2). Montrer que ce schéma peut également se récrire en fonction des matrices ci-dessus.
   (b) Montrer que le schéma implicite définit bien une famille $(u_j^n)_{n\in\mathbb{N},j\in A_N}$.
   (c) Montrer que le schéma implicite est stable sans conditions sur les pas de discrétisation δx et δt.

5. Montrer que l'erreur de discrétisation associée à ces deux schémas est majorée par

$$\left|\varepsilon_j^n\right| \leq \frac{\delta t}{2} \sup|\partial_t^2 u| + \frac{\delta x^2}{12} \sup|\partial_x^4 u| + \mathcal{O}(\delta t^3 + \delta x^4).$$

Exercice 2.

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'équation suivante, dite *équation de Burgers* :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\partial_x\left(u^2(t,x)\right) = 0, & (t,x) \in [0,\infty[\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3}$$

1. (a) Supposons que u soit une solution au sens classique de l'équation (3). Montrer que l'équation $y'(t) = u(t, y(t))$ a une unique solution de condition initiale $y(0) = x_0$. Montrer que la fonction $t \mapsto u(t, y(t))$ est alors constante. En déduire que la fonction u est constante sur les droites d'équation
$$x = x_0 + tu_0(x_0). \tag{4}$$
   (b) Montrer que, si u est une fonction régulière sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}$ et constante sur les droites d'équation (4), alors u est solution de (3) au sens classique.
   (c) Montrer que si la condition initiale u_0 est dérivable et croissante alors il existe une solution au sens classique pour l'équation (3), et ce pour tout temps t. On pourra vérifier que pour tout couple (t,x) il existe un unique x_0 tel que (t,x) soit sur la droite d'équation (4), et que la fonction qui à (t,x) associe x_0 est dérivable.
   (d) Montrer que s'il existe deux réels x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$ et $u_0(x_1) > u_0(x_2)$ alors il ne peut pas exister de solution au sens classique définie sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}$.
   (e) Montrer que si la condition initiale est donnée par $u_0(x) = -\sin(x)$ alors il existe une solution classique pour $t \in]0,1[$, et il n'en existe pas au delà du temps $t_0 = 1$.
2. Donner une formulation faible de l'équation (3).
3. On considère la condition initiale
$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \tag{5}$$
   Montrer que pour tout $\lambda \in [0,1]$ la fonction u^λ définie par
$$u^\lambda(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{\lambda t}{2}, \\ \lambda & \text{si } \frac{\lambda t}{2} \leq x < \frac{(1+\lambda)t}{2}, \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{(1+\lambda)t}{2}, \end{cases}$$
   est solution faible de l'équation (3).

On rajoute maintenant un terme de diffusion à l'équation (3), pour obtenir l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \sigma\Delta u(t,x) + \frac{1}{2}\partial_x(u^2(t,x)), & (t,x) \in]0,\infty[\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{6}$$

4. Montrer que si la fonction v définie par la formule
$$u(t,x) = -2\sigma \frac{\partial_x v(t,x)}{v(t,x)}$$
   satisfait l'équation de la chaleur
$$\partial_t v(t,x) = \sigma\Delta v(t,x), \ (t,x) \in]0,\infty[\times\mathbb{R}, \tag{7}$$
   alors la fonction u satisfait (3).

5. En déduire une formule pour la solution de l'équation (6) en fonction de u_0.

   On se rappellera que la solution de l'équation (7) est donnée par

$$v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{\mathbb{R}} v(0,y) e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2 t}} \mathrm{d}y.$$

6. Dans cette question, on suppose que la condition initiale est donnée par (5). Montrer que quand σ tend vers 0, la solution u_σ de l'équation (6) converge en tout point (t,x) vers la fonction $\tilde{u}$ définie par

$$\tilde{u}(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x}{t} & \text{si } 0 \leq x < t, \\ 1 & \text{si } x \geq t. \end{cases}$$

7. Vérifier que $\tilde{u}$ est solution faible de l'équation (3).