Université Pierre et Marie Curie
Master professionnel IFMA
2013 - 2014

Méthodes numériques déterministes

Raphaël Roux *

*. raphael.roux@upmc.fr

Table des matières

0.1	Classification des équation d'ordre deux	6
0.2	Quelques exemples d'équations aux dérivées partielles	6
0.3	Objectifs	9
1	Équations aux dérivées partielles elliptiques	11
1.1	L'opérateur Δ en dimension un	11
1.1.1	Le théorème de Lax-Milgram	16
1.2	La dimension supérieure	21
1.2.1	Différentes conditions au bord	23
1.3	Dépendance par rapport aux paramètres	23
1.3.1	Continuité L^∞	23
1.3.2	Continuité L^2	25
1.4	Résolution numérique	25
1.4.1	La méthode des différences finies	26
1.4.2	La méthode des éléments finis	31
2	Équations aux dérivées partielles paraboliques	37
2.1	Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$	38
2.2	Formulation variationnelle	39
2.3	Le principe du maximum	43
2.4	Approximation numérique	45
2.4.1	Méthode des différences finies	45
2.4.2	Différences finies pour un problème aux limites	52
2.5	L'équation de la chaleur	56
2.6	Séries de Fourier	57
2.7	Régularité d'une fonction définie par une série de Fourier	58
2.8	Un résultat d'existence	59
2.9	Ajout d'un second membre	65
2.10	Espaces de Sobolev	66
2.11	Formulation variationnelle pour l'équation de la chaleur	69
2.11.1	Estimation d'énergie	70
2.12	Principe du maximum	71

3	Équations de transport	73
3.1	Schéma centré et schéma de Lax-Wendroff	73
3.1.1	Schéma centré	73
3.1.2	Le schéma de Lax-Wendroff	76
3.2	Schéma décentré	76
4	Interprétation probabiliste des EDPs	79
4.1	Mouvement Brownien et opérateur Laplacien	79
4.1.1	Équation de Poisson	79
4.1.2	L'équation de la chaleur	82
4.1.3	L'équation de la chaleur rétrograde	82
4.2	Processus de diffusion	83
4.3	Exemple : l'équation de Black-Scholes	85

Introduction

On appelle *équation aux dérivées partielles*, en abrégé *EDP* une équation dont l'inconnue est une fonction u , définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et faisant intervenir les dérivées successives de u par rapport aux différentes variables. Formellement, une équation aux dérivées partielles prend donc la forme

$$\Phi(x, u(x), (\partial_i(x))_{i=1, \dots, n}, (\partial_{ij}u(x))_{i,j=1, \dots, n}, \dots) = 0 \quad (0.0.1)$$

où x est une variable appartenant à un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ∂_i représente la dérivation par rapport à la variable x_i et Φ est une certaine fonction de plusieurs variables à valeurs réelles.

Les équations aux dérivées partielles sont très étudiées car elles permettent de modéliser de nombreux phénomènes issus de domaines variés tels que la physique, la finance, la dynamique des populations, etc.

Dans ce cours, on s'intéressera principalement à des équations aux dérivées partielles qui seront :

- *linéaires*, c'est-à-dire que la fonction Φ dans (0.0.1) sera linéaire (ou plutôt, affine) par rapport à u pour tout x fixé,
- *d'ordre un ou deux*, c'est-à-dire que les dérivées partielles apparaissant dans l'équation seront uniquement des dérivées simples (∂_i) ou doubles (∂_{ij}).

De manière générale, ces équations prennent la forme

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} u(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i u(x) + c(x) u(x) = f(x).$$

On peut donc diviser les termes de l'équation en quatre catégories :

- Le terme d'ordre deux, $\sum_{ij} a_{ij} \partial_{ij} u$. Quitte à remplacer le coefficients a_{ij} par le coefficient $\frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$, on peut supposer que la matrice (a_{ij}) est symétrique. Il est donc possible de la diagonaliser dans une base orthonormale, avec des valeurs propres réelles.

Si la matrice (a_{ij}) est constante, on pourra donc, quitte à changer la base de l'espace considéré, écrire le terme d'ordre deux sous la forme

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \partial_{ii} u(x),$$

où $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$. Le cas où ε_i vaut 1 quel que soit i est un cas particulier important. L'opérateur Δ associé

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \partial_{ii} u(x)$$

est appelé *opérateur Laplacien*.

- Le terme d'ordre un, donné par $\sum_i b_i \partial_i u$, qui peut aussi s'écrire $b \cdot \nabla u$, où $\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u)$ désigne le gradient de u .
- Le terme d'ordre zéro, cu .
- Le second membre f . Une équation dont le second membre est nul est dite *homogène*. Pour une équation homogène, la fonction nulle sera toujours solution. Par linéarité, l'ensemble des solutions d'une équation homogène constituent un espace vectoriel, et l'ensemble des solutions d'une équation non-homogène est un espace affine dirigé par l'espace des solutions de l'équation homogène associée. Par conséquent, l'étude d'une équation non homogène commence souvent par l'étude de l'équation homogène correspondante.

Par ailleurs, pour assurer l'unicité des solutions de l'équation, on aura en général à rajouter une ou plusieurs conditions supplémentaires fixant la valeur de la fonction u ou de sa dérivée sur le bord de l'ouvert considéré. On parlera de *conditions au bord* ou, si une des variable s'interprète naturellement comme la variable de temps, de *condition initiale* (ou *finale*).

0.1 Classification des équation d'ordre deux

Les équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre deux sont souvent classées en trois grandes catégories distinctes : les équations *elliptiques*, *paraboliques* et *hyperboliques*. Cette terminologie vient de la classification des coniques en dimension 2 :

- les ellipses, dont les équations peuvent se ramener par changement de variable à

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Les termes d'ordre deux dans cette équation constituent une forme quadratique définie positive.

- les paraboles, dont les équations peuvent se ramener par changement de variable à

$$x^2 + y = 1.$$

Ici, le terme d'ordre deux, constitue une forme quadratique positive, mais dégénérée : il y a un coefficient nul dans la décomposition en somme de carrés.

- les hyperboles, dont les équations peuvent se ramener par changement de variable à

$$x^2 - y^2 = 1.$$

La forme quadratique correspondant au terme d'ordre deux n'est plus positive : les deux carrés ont des signes opposés.

De la même manière, on va classer les EDP d'ordre deux en fonction de la signature de la forme quadratique associée à la matrice (a_{ij}) du terme d'ordre 2 :

- si la matrice (a_{ij}) est définie positive (ou définie négative), l'équation sera dite *elliptique* ;
- si la matrice (a_{ij}) est dégénérée, l'équation sera dite *parabolique* ;
- si la matrice n'est ni positive ni négative, on dira que l'équation est *hyperbolique*.

0.2 Quelques exemples d'équations aux dérivées partielles

On va maintenant donner quelques exemples de telles équations, afin de montrer la richesse de ces objets.

Déformation d'une membrane

L'équation

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

modélise la position d'équilibre d'un fil (pour $d = 1$) ou d'une membrane (pour $d = 2$) élastique sur le/laquel(le) s'exerce au point x une force $f(x)$ et dont l'élasticité au point x est donnée par $c(x)$. L'ouvert Ω représente la forme de la membrane non-soumise à des forces extérieures, et la solution $u(x)$ représente le déplacement du fil ou de la membrane entre sa position d'équilibre sans force extérieure et sa position d'équilibre sous la force f . La condition au bord $u(x) = 0$ signifie que les bords de la membrane sont liés à un point fixe, et par conséquent ne peuvent se déplacer.

On remarque que cette équation est elliptique.

Propagation de la chaleur

L'équation ^(note 2)

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \nabla \cdot (\sigma^2(x) \nabla u(t, x)) = f(t, x), & t \in]0, \infty[, x \in \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(t, x) = g(t, x), & t \in [0, \infty[, x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

modélise la propagation de la chaleur dans un solide de forme Ω dont la conductivité au point x est donnée par $\sigma(x) \in \mathbb{R}$, et mis en contact avec une source de chaleur de température $f(t, x)$ au point t et au temps x . La fonction u_0 désigne la température initiale du solide. De plus, le bord du solide est en contact avec un thermostat de température g .

On a ici une équation parabolique, puisque les dérivées d'ordre deux ne concernent que la variable x et non la variable t . Pour cette raison, il y a une dissymétrie entre la variable x et la variable t , ce qui justifie l'utilisation de deux notations différentes pour ces variables. Cette dissymétrie a souvent un sens dans le problème modélisé : ici la variable t désigne le temps alors que la variable x désigne l'espace.

Supposons que la fonction g ne dépende pas du temps. Si on cherche une position d'équilibre pour l'équation de la chaleur, c'est-à-dire une solution $u(t, x) = u_\infty(x)$ indépendante du temps, alors la dérivée temporelle de la solution s'annule, et la solution stationnaire vérifie une équation parabolique :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma^2(x) \nabla u_\infty(t, x)) = f(t, x), & x \in \Omega, \\ u_\infty(x) = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Vibration d'une corde

On peut modéliser la vibration d'une corde par l'équation

$$\partial_t^2 u(t, x) - c^2 \partial_x^2 u(t, x) = 0, t \in]0, \infty[, x \in]0, 1[,$$

munie des conditions au bord suivantes

$$\begin{cases} u(t, 0) = 0, & t \in [0, \infty[, \\ u(t, 1) = 0, & t \in [0, \infty[, \end{cases}$$

(note 2). On note $\nabla u = (\partial_i u)_{i=1, \dots, d}$ le *gradient* d'une fonction à valeurs réelles, et $\nabla \cdot w = \sum_{i=1}^d \partial_i w_i$ la *divergence* d'un champ de vecteurs.

ainsi que des conditions initiales

$$\begin{cases} u(0, x) = u_0(x), & x \in [0, 1], \\ \partial_x u(0, x) = u_1(x), & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Les fonction u_0 et u_1 désignent la position et la vitesse initiale de la corde. Les conditions $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$ signifient que la corde est fixée en ses deux extrémités. Le paramètre c , qui dépend des caractéristiques physiques de la corde, désigne la vitesse à laquelle les ondes se propagent dans la corde.

On a ici affaire à une équation hyperbolique.

Évolution du trafic routier

Si on assimile une autoroute à une droite infinie et qu'on l'observe à grande distance, on peut supposer qu'en chaque point x le nombre de voiture par unité de distance est donné par une *densité* u . De plus on peut supposer que la vitesse des automobilistes va dépendre de la densité du trafic. La vitesse va donc prendre la forme $v(u(t, x))$. L'évolution de la densité du trafic est alors décrite par l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x (v(u(t, x))u(t, x)) = 0, & t \in]0, \infty[, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (0.2.1)$$

Ce type d'équation est appelé *équation de transport*.

Cette équation est assimilée à une équation hyperbolique. En effet, si v est choisi constant, on voit, en appliquant l'opérateur $\partial_t - v\partial_x$ à l'équation (0.2.1), que la fonction u vérifie l'équation

$$\partial_t^2 u(t, x) - v^2 \partial_x^2 u(t, x) = 0,$$

qui est l'équation des ondes décrite précédemment, qui est bien une équation hyperbolique.

Dynamique des fluides

Les équation de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \nabla \cdot u(t, x) = 0, & t \in]0, \infty[, x \in \mathbb{R}^d, \\ \partial_t u(t, x) + (u(t, x) \cdot \nabla) u(t, x) - \nu \Delta u(t, x) = -\nabla p(t, x) + f(t, x), & t \in]0, \infty[, x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

modélisent l'écoulement d'un fluide incompressible dans un champ de pression p et soumis à une force f . Plus précisément $u(t, x)$ modélise la vitesse du fluide au point x et à l'instant t .

On a ici une compétition entre le terme de viscosité $\nu \Delta u$ et le terme de transport non-linéaire $(u \cdot \nabla)u$. En fonction de la valeur de ν et de la vitesse typique du fluide, le terme qui dominera la dynamique de l'équation pourra être l'un ou l'autre de ces deux termes. Si il s'agit du terme de viscosité, l'équation présentera les caractéristiques des équations paraboliques, si il s'agit du terme de transport, elle présentera les caractéristiques des équations hyperboliques.

Évolution du prix d'une option

En finance, le prix d'une option peut s'exprimer comme une espérance, par exemple, pour une option d'achat (ou *call*) sur un actif $(S_t)_{t \geq 0}$ valant x à l'instant t , le prix est donné par

$$u(t, x) = \mathbb{E} \left[(S_T - K)^+ e^{-r(T-t)} \middle| S_t = x \right],$$

où r représente le taux d'intérêt sans risque. Si l'actif $(S_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien géométrique de coefficient de diffusion σ , il se trouve que la fonction u vérifie une équation aux dérivées partielles, dite *équation de Black-Scholes*

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \Delta u(t, x) + rx \partial_x u(t, x) - ru(t, x) = 0, & x \in]0, \infty[, t \in]0, T[, \\ u(T, x) = (x - K)^+, & x \in]0, \infty[. \end{cases}$$

On a ici affaire à une équation parabolique, avec une condition finale.

De manière générale, l'espérance d'un processus stochastique vérifie une équation aux dérivées partielles. La résolution numérique de ces équation permet de remplacer l'utilisation d'une méthode de Monte Carlo.

0.3 Objectifs

Pour une équation donnée, plusieurs question naturelles, fortement liées les unes avec les autres, peuvent se poser.

- *Cadre fonctionnel* : les équations considérées portent sur des fonctions dont on calcule des dérivées. On pourrait donc supposer que l'on cherche des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Il se trouve que cette hypothèse est en général beaucoup trop forte pour pouvoir être utilisée en pratique. Par exemple, si on a une suite de fonctions vérifiant une équation approchée, on s'attend à ce que leur limite vérifié l'équation. Cependant, la convergence de la suite de fonctions à généralement lieu en un sens faible, par exemple en norme $\mathbb{L}^2$, alors qu'il faudrait une convergence uniforme de la fonction et de ses dérivées premières et secondes pour assurer que la limite est de classe $\mathcal{C}^2$. On va donc chercher des espaces de fonctions dont la structure est préservée par l'équation. Les espace typique dans lesquels on se placera seront les espaces de Sobolev, qui correspondent aux fonctions dont les dérivées sont dans $\mathbb{L}^p$, pour un certain $1 \leq p \leq \infty$.
- *Existence de la solution* : une fois un cadre fonctionnel choisi, la première question est de savoir si on peut trouver une fonction de cette espace qui soit solution de l'équation. Pour avoir existence d'une solution, il faut que l'espace fonctionnel soit suffisamment grand. Plus l'espace est petit, plus l'existence sera difficile à montrer.
- *Unicité de la solution* : si l'espace fonctionnel est choisi trop grand, il est possible que l'équation ait plusieurs solution. Or, on s'attend à ce qu'une seule de ces solutions ait un sens physique. Il faut donc rajouter des conditions (autrement dit, rétrécir l'espace fonctionnel considéré) pour sélectionner la bonne solution.
- *Régularité de la solution* : une fois que l'on est assuré de l'existence et de l'unicité de la solution dans un certain espace fonctionnel, il est possible que la solution de l'équation ait plus de régularité que les fonctions typiques de cet espace. Une situation classique est par exemple de montrer l'existence et l'unicité dans un espace de Sobolev, puis de montrer que la solution est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- *Continuité par rapport aux paramètres* : pour une équation fixée dont on a montré l'existence et l'unicité des solutions, différents jeux de coefficients vont donner différentes solution. Par conséquent, on peut voir la solution comme une fonction des paramètres de l'équation. Une propriété agréable pour une équation est que cette fonction soit continue, autrement dit que la résolution de l'équation avec des paramètres légèrement différents donne une solution légèrement différente. Pour quantifier ce "légèrement", on sera alors amener à définir également un cadre fonctionnel sur les coefficients.

- *Approximation numérique* : en pratique, les solutions de la plupart des équation considérées n'ont pas d'expression explicite et on ne peut avoir que des représentation approchées des solutions. Ces solutions approchées sont calculées par un ordinateur, qui par nature, ne peut traiter que des données en quantités finies. Pour donner une solution approchée à l'équation, on va donc chercher à discrétiser l'équation, de sorte à obtenir une solution approchée, pouvant être décrite par un nombre fini de paramètres.
Il faudra alors être capable d'estimer l'erreur entre la solution et la solution approchée, au sens d'une norme adaptée à l'équation.

Chapitre 1

Équations aux dérivées partielles elliptiques

Dans cette partie, on va s'intéresser aux équations aux dérivées partielles *elliptiques*, c'est-à-dire dont le terme d'ordre deux est non-dégénéré. Le prototype d'équation elliptique est l'*équation de Poisson*, qui s'écrit

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.0.1)$$

1.1 L'opérateur Δ en dimension un

Pour comprendre le comportement de cette équation, on va commencer par considérer le cas de la dimension 1. On se place donc sur un intervalle, $]0, 1[$ pour fixer les idées, et l'équation s'écrit alors

$$u''(x) = f(x).$$

Autrement dit, u est simplement une primitive seconde de f , qui peut s'obtenir par deux intégrations successives, pour peu que la fonction f soit suffisamment régulière (continue sur $[0, 1]$ par exemple). On remarque toutefois que la solution n'est pas unique, puisque si u est solution, alors v est solution si et seulement si $(v - u)'' = 0$, autrement dit si $u - v$ est affine. Par conséquent, la solution est unique à une fonction affine près, et elle deviendra unique si on fixe *deux* conditions. L'équation étant posée sur un segment, un exemple simple de couple de conditions est de fixer la valeur de u au bord.

Finalement, on a démontré le résultat suivant :

Théorème 1.1.1. *Si $f : [0, 1]$ est une fonction continue, alors il existe une unique fonction u de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ telle que*

$$\begin{cases} u''(x) = f(x) & \text{pour } x \in]0, 1[, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

De plus, si f est de classe $\mathcal{C}^s$, avec $s \geq 0$, alors u est de classe $\mathcal{C}^{s+2}$.

Les conditions $u(0) = u(1) = 0$ s'appellent les *conditions de Dirichlet homogènes*. Le même théorème serait valable si on remplaçait ces conditions par des conditions de Dirichlet générales, à savoir $u(0) = \alpha$ et $u(1) = \beta$ pour deux réels α et β donnés.

On peut aussi remarquer que les *conditions de Neumann*, de la forme $u'(0) = \alpha$ et $u'(1) = \beta$ ne permettent pas en général d'avoir une unique solution. En effet, étant donné une solution de $u'' = f$, les autres solutions sont de la forme $u + ax + b$, dont les dérivées en 0 et 1 sont données par $u'(0) + a$ et $u'(1) + a$. Par conséquent, si il existe une solution pour des dérivées au bord données, alors il y a une infinité de solutions, qui se déduisent les unes des autres par ajout d'une constante.

Pour passer en dimension supérieure, il va falloir considérer l'opérateur Δ comme une application linéaire entre deux espaces de fonctions. Pour comprendre quelle forme devrait prendre cet opérateur, nous allons chercher les valeurs propres de Δ . Autrement dit, on cherche à résoudre, en (u, λ) l'équation

$$u''(x) = \lambda u(x). \quad (1.1.1)$$

Comme précédemment, on va avoir deux degrés de liberté sur la solution, puis qu'on a affaire à une équation différentielle du second degré. Les solutions de l'équation (1.1.1) sont de la forme

$$\begin{cases} \alpha e^{\sqrt{\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{si } \lambda > 0 ; \\ \alpha x + \beta & \text{si } \lambda = 0 ; \\ \alpha \cos(\sqrt{-\lambda}x) + \beta \sin(\sqrt{-\lambda}x) & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

Si on rajoute des conditions du type $u(0) = 0$ et $u(1) = 0$, on n'a donc, outre la solution nulle, des solutions que dans le cas $\lambda < 0$ et $\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0$, autrement dit que si $\lambda = -\pi^2 n^2$, avec $n \geq 1$.

Théorème 1.1.2. Soit $\mathcal{C}_0^2([0, 1])$ l'espace des fonctions deux fois continument dérivables et nulles en 0 et en 1. Les valeurs propres de l'opérateur Δ

$$\begin{cases} \Delta : \mathcal{C}_0^2([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}^0([0, 1]) \\ u \mapsto u'' \end{cases}$$

sont les $-\pi^2 n^2$, pour $n \geq 1$, associées aux vecteurs propres $\sin(\pi n x)$.

On a la propriété suivante, qui signifie en quelque sorte que l'on a "diagonalisé" l'opérateur Δ , si l'on se place dans l'espace $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$:

Propriété 1.1.3. La famille $(\sqrt{2} \sin(\pi n x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne de $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$ constituée de fonctions propres de Δ .

Démonstration. On vérifie d'une part, pour $n, m > 0$,

$$\int_0^1 \sin(\pi n x) \sin(\pi m x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(\pi(n-m)x) - \cos(\pi(n+m)x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'autre part, la famille $(\sin(\pi n x))_{n \in \mathbb{N}}$ engendre un sous-espace vectoriel dense de $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$. Pour le voir, on remarque tout d'abord que la théorie des séries de Fourier (et plus exactement le théorème de Dirichlet) montre que si φ est une fonction $\mathcal{C}^1$ nulle en 0 et en 1, la fonction $\tilde{\varphi}$, 2-périodique définie par

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in [0, 1], \\ -\varphi(-x) & \text{si } x \in]-1, 0[, \end{cases}$$

est approchée uniformément par sa série de Fourier, en tant que fonction $\mathcal{C}^1$. De plus, la fonction $\tilde{\varphi}$ étant impaire, sa série de Fourier est une somme de termes de la forme $\sin(n\pi x)$. Comme la convergence uniforme implique la convergence dans $\mathbb{L}^2$, cela implique que l'adhérence dans $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$ de l'espace engendré par les $(\sin(n\pi x))_{n \in \mathbb{N}}$ contient l'espace des fonctions $\mathcal{C}^1$ nulles en 0 et en 1. On conclut remarquant que les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ nulles en 0 et 1 constituent un sous-espace dense de $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$. $\square$

La propriété 1.1.3, nous permet de définir formellement la “solution” de (1.0.1) dès que le second membre f est dans $\mathbb{L}^2$:

Propriété 1.1.4. *Si f s'exprime dans $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$ comme*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sqrt{2} \sin(\pi n x) \quad (1.1.2)$$

alors la série

$$u(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\pi^2 n^2} \sqrt{2} \sin(\pi n x) \quad (1.1.3)$$

définit bien une fonction de $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$.

La fonction u devrait correspondre à la solution de l'équation (1.0.1) : en effet, si on dérive deux fois chacun des termes de la somme définissant u , on obtient la somme définissant f . Cependant u peut très bien ne pas être deux fois dérivable, car l'interversion de la somme infinie et de la dérivation peut ne pas être autorisée.

Démonstration. La somme (1.1.2) définit une fonction de $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$ si et seulement si la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la condition

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty. \quad (1.1.4)$$

On remarque alors que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{-\lambda_n}{n^2 \pi^2} \right|^2 \leq \frac{1}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty,$$

de sorte que la série (1.1.3) définit bien une fonction de $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$. $\square$

Au vu des calculs précédents, il est donc naturel de poser l'équation (1.0.1) non pas dans $\mathcal{C}^2$, mais dans $\mathbb{L}^2$: on ne cherche plus la solution sous la forme d'une fonction deux fois dérivable dont les dérivées secondes vérifient en chaque point une certaine équation, mais sous la forme d'une fonction de carré intégrable qui vérifie une formulation “intégrale” de l'équation. Nous allons maintenant déterminer quelle doit être cette formulation.

Si on multiplie les deux membres de l'équation (1.0.1) par une fonction donnée φ (supposée pour l'instant aussi régulière que nécessaire) et que l'on fait une intégration par parties, on obtient, au moins formellement, l'équation

$$- \int_0^1 u'(x) \varphi'(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx. \quad (1.1.5)$$

Cette équation est appelée *formulation variationnelle* de l'équation (1.0.1), car la fonction φ est ici une variable. L'égalité (1.1.5) a un sens si les deux fonctions $u'\varphi'$ et $f\varphi$ sont bien définies et intégrables

sur $]0, 1[$. Il s'agit donc de choisir u , f et φ dans le bon espace de fonctions pour que tout ceci ait un sens. Pour cela, on va définir un espace de fonctions plus grand que l'espace des fonctions $\mathcal{C}^2$, dans lequel on pourra définir la dérivée d'une fonction, mais qui présentera une structure Hilbertienne.

Définition 1.1.5. On appelle espace de Sobolev $\mathbb{H}^1(]0, 1[)$ l'espace

$$\mathbb{H}^1(]0, 1[) = \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^0([0, 1]), \exists \psi \in \mathbb{L}^2(]0, 1[), \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in]0, 1[, \varphi(x) = c + \int_0^x \psi(y)dy \right\}.$$

On définit également l'espace $\mathbb{H}_0^1(]0, 1[)$ comme le sous-ensemble de $\mathbb{H}^1(]0, 1[)$ constitué des fonctions $\varphi \in \mathbb{H}^1(]0, 1[)$ telles que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

L'espace $\mathbb{H}^1(]0, 1[)$ correspond donc à l'espace des fonction de $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$ admettant une dérivée dans $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$.

D'après la proposition suivante, la fonction ψ apparaissant dans la définition de $\mathbb{H}^1(]0, 1[)$ est en fait entièrement déterminée par φ et sera notée φ' . Si φ est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction φ' correspond bien à la dérivée de φ au sens classique.

Propriété 1.1.6. Si ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions de $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$ et c_1 et c_2 sont deux constantes telles que pour tout x de $[0, 1]$ on ait

$$c_1 + \int_0^x \psi_1(y)dy = c_2 + \int_0^x \psi_2(y)dy, \quad (1.1.6)$$

alors on a $c_1 = c_2$ et $\psi_1 = \psi_2$ presque partout.

Démonstration. En prenant $x = 0$ dans (1.1.6), on obtient $c_1 = c_2$, de sorte que $\int_0^x (\psi_1(y) - \psi_2(y))dy = 0$ quel que soit $x \in [0, 1]$. Cette égalité implique que $\psi_1 = \psi_2$ presque partout. $\square$

On peut caractériser les fonction de $\mathbb{H}_0^1(]0, 1[)$ parmi celles de $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$ en observant leurs coefficients dans le développement en série de sinus :

Propriété 1.1.7. Soit φ une fonction de $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$, que l'on décompose en

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sqrt{2} \sin(\pi n x).$$

La fonction φ est dans $\mathbb{H}_0^1(]0, 1[)$ si et seulement si la suite (λ_n) vérifie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\lambda_n|^2 < \infty. \quad (1.1.7)$$

On remarquera que la condition (1.1.7) est bien une condition strictement plus forte que la condition (1.1.4), de sorte que $\mathbb{H}_0^1(]0, 1[)$ est bien un sous-espace strict de $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$.

Démonstration. On admettra que la famille

$$\{\mathbf{1}_{]0, 1[}\} \cup \{\sqrt{2} \cos(n\pi x), n \geq 1\}$$

est une base Hilbertienne de $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$, la preuve étant essentiellement la même que dans le cas de la famille $(\sqrt{2}\sin(n\pi x))_{n \geq 1}$.

On commence par une remarque : comme $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$ est inclus dans $\mathbb{L}^1(]0, 1[)$, si une fonction ψ est dans $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$ on peut définir une fonction Ψ , continue sur $[0, 1]$, par $\Psi(x) = \int_0^x \psi(y)dy$. Comme Ψ est continue, elle est notamment dans $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$. Le calcul suivant montre que la décomposition de ψ en série de sinus se déduit de la décomposition de Ψ en série de cosinus par dérivation :

$$\begin{aligned} \langle \sqrt{2}\cos(n\pi x), \Psi \rangle &= \int_0^1 \sqrt{2}\cos(n\pi x)\Psi(x)dx = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{2}\cos(n\pi x)\psi(y)dydx \\ &= \int_0^1 \int_y^1 \cos(n\pi x)\psi(y)dx dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_y^1 \cos(n\pi x)dx \right) \psi(y)dy \\ &= \frac{-1}{n\pi} \int_0^1 \sin(n\pi y)\psi(y)dy \\ &= \frac{-1}{n\pi} \langle \sqrt{2}\sin(n\pi x), \psi \rangle. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Autrement dit, on peut développer ψ et Ψ sous la forme

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sqrt{2}\sin(n\pi x) \text{ et } \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\lambda_n}{n\pi} \sqrt{2}\cos(n\pi x). \quad (1.1.9)$$

Maintenant, supposons que φ soit dans $\mathbb{H}_0^1(]0, 1[)$. On écrit alors $\varphi(x) = \int_0^x \varphi'(y)dy$, où φ' est la fonction de $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$ dont l'existence est assurée par la définition de $\mathbb{H}_0^1(]0, 1[)$. On remarque que, φ étant dans $\mathbb{H}_0^1(]0, 1[)$,

$$0 = \varphi(1) = \int_0^1 \varphi'(y)dy = \langle \mathbf{1}_{]0, 1[}, \varphi' \rangle,$$

de sorte que φ' est orthogonale au vecteur $\mathbf{1}_{]0, 1[}$. On peut donc écrire

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \sqrt{2}\cos(n\pi x),$$

où la suite μ_n vérifie $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^2 < \infty$. Les coefficients de la série définissant φ sont, d'après (1.1.9), les $\lambda_n = -\frac{\mu_n}{n\pi}$, qui satisfont bien (1.1.7).

Pour la réciproque, on considère une fonction $\varphi(x) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n \sqrt{2}\sin(n\pi x)$ telle que la suite $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ vérifie (1.1.7) et on définit une fonction ψ de $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$ par la formule

$$\psi(x) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n n\pi \sqrt{2}\cos(n\pi x).$$

La série définissant ψ est bien convergente dans $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$, en vertu de (1.1.7). En notant $\Psi(x) = \int_0^x \psi(y)dy$, le calcul (1.1.9) montre que $\Psi = \varphi$, de sorte que φ est dans $\mathbb{H}^1(]0, 1[)$, avec $\varphi' = \psi$. $\square$

1.1.1 Le théorème de Lax-Milgram

Maintenant que le cadre fonctionnel dans lequel nous allons nous placer a été défini, on va énoncer un théorème permettant de montrer l'existence et l'unicité d'une solution pour une formulation de l'équation (1.0.1) dans ce cadre fonctionnel.

On rappelle le théorème de Riesz, selon lequel un espace de Hilbert est isomorphe à son dual. Dans toute cette partie, on désignera par H un espace de Hilbert, dont le produit scalaire sera noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Théorème 1.1.8 (Riesz). *L'application de H dans son dual H' , qui à un vecteur u associe la forme linéaire*

$$v \mapsto \langle u, v \rangle$$

est un isomorphisme. Notamment, si l est une forme linéaire, il existe un unique vecteur de H tel que, pour tout v de H , on ait

$$l(v) = \langle u, v \rangle.$$

Démonstration. Si l est la forme linéaire nulle, il est clair que $u = 0$ est l'unique vecteur de H vérifiant $l(v) = \langle u, v \rangle$ pour tout u de H . On va donc supposer que $l \neq 0$.

Le noyau $\text{Ker}(l)$ de la forme linéaire l est un hyperplan fermé de H . Son orthogonal est donc une droite, dont on note $\mathbf{n}$ un vecteur directeur. Soit alors

$$u = \frac{l(\mathbf{n})}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \mathbf{n},$$

de sorte que

$$l(u) = \frac{(l(\mathbf{n}))^2}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} = \left(\frac{l(\mathbf{n})}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \right)^2 \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \langle u, u \rangle.$$

On a alors, pour tout v de H

$$l(v) = l\left(v - \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u + \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u\right) = l\left(v - \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u\right) + \langle v, u \rangle.$$

Or

$$\left\langle u, v - \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u \right\rangle = 0,$$

de sorte que $v - \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$ est orthogonal à u , et donc dans le noyau de l . On a donc monté $l(v) = \langle u, v \rangle$. $\square$

Un corollaire important du théorème de Riesz est le suivant, qui va nous permettre de traiter certaines équations elliptiques.

Corollaire 1.1.9 (Théorème de Lax-Milgram). *Soit H un espace de Hilbert dont on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire, et soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire sur H . On suppose que a est coercive et continue, c'est-à-dire qu'elle vérifie, pour certaines constantes c et C , les inégalités*

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\| \text{ et } a(u, v) \geq c \|u\|^2,$$

pour tous u et v de H . On considère également une forme linéaire continue l sur H . On a notamment, pour une certaine constante C ,

$$\forall u \in H, |l(u)| \leq C \|u\|.$$

Alors, pour il existe un élément u de H tel que pour tout v de H , on ait l'égalité

$$a(u, v) = l(v).$$

De plus, si a est symétrique, u est l'unique solution de la formulation variationnelle

$$\frac{1}{2}a(u, u) - l(u) = \min_{v \in H} \left(\frac{1}{2}a(v, v) - l(v) \right).$$

Remarque : dans le cas où a est symétrique, la continuité et la coercivité de a font que a est un produit scalaire sur H , équivalent au produit scalaire initial. Par conséquent dans ce cas, le théorème de Lax-Milgram correspond simplement au théorème de Riesz.

Démonstration. On peut définir, par le théorème de Riesz, un opérateur A de H dans lui-même qui à un vecteur u associe l'unique élément Au de H tel que

$$\forall v \in H, a(u, v) = \langle Au, v \rangle.$$

On doit alors montrer que A est bijectif. L'injectivité découle de la coercivité de a . Pour montrer la surjectivité, on remarque d'abord que l'image de A est dense dans H puisque si $\langle Au, v \rangle = a(u, v) = 0$ pour tout $v \in H$, alors u est nul. D'autre part, son image est fermée car si $(Au_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, la coercivité de a montre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également.

Pour la représentation de u comme solution d'un problème d'optimisation, on écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a(u+h, u+h) - l(u+h) &= \frac{1}{2}a(u, u) - l(u) + (a(u, h) - l(h)) + \left(\frac{1}{2}a(h, h) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}a(u, u) - l(u) \right) + 0 + \left(\frac{1}{2}a(h, h) \right) \\ &\geq \left(\frac{1}{2}a(u, u) - l(u) \right) + \frac{c}{2}\|h\|^2, \end{aligned}$$

ce qui montre que u est l'unique minimum de Φ . □

Pour donner une formulation de l'équation (1.0.1) dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$, on va appliquer le théorème de Lax-Milgram aux formes

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx \text{ et } l(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

On doit tout d'abord montrer que la forme bilinéaire a est coercive, ce qui est exprimé par le résultat suivant.

Théorème 1.1.10 (Inégalité de Poincaré). *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Il existe une constante C telle que*

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

pour toute fonction test u dans $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

L'inégalité de Poincaré est bien évidemment fautive pour une fonction quelconque de $\mathbb{H}^1(\Omega)$: il suffit de prendre φ constante et non nulle, on a alors $\|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \neq 0$ mais $\|\nabla\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0$. On se limite donc aux fonctions nulles au bord : une fonction constante et nulle sur le bord de Ω est uniformément nulle.

Une conséquence de l'inégalité de Poincaré est que la quantité

$$\|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx$$

est une norme sur $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

Démonstration. Soit φ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω à support compact. On peut prolonger φ par 0 hors de Ω et obtenir ainsi une fonction régulière sur $\mathbb{R}^d$. On note $x = (x', x_d)$, $x \in \mathbb{R}^{d-1}$, $x_d \in \mathbb{R}$. En intégrant par parties selon la dernière coordonnée, on trouve

$$\int_{\Omega} \varphi(x', x_d)^2 dx = 2 \int_{\Omega} x_d \varphi(x', x_d) \partial_{x_d} \varphi(x', x_d) dx.$$

Les termes de bord sont nuls, puisque φ est à support compact. Comme Ω est un ouvert borné, on a $|x_d| \leq C$ sur le support de Ω . On a donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\varphi(x', x_d)|^2 dx &\leq 2 \int_{\Omega} |x_d| |\varphi(x', x_d)| |\partial_{x_d} \varphi(x', x_d)| dx \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} |\varphi(x', x_d)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\partial_{x_d} \varphi(x', x_d)|^2 dx \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

par Cauchy-Schwarz, soit encore

$$\left(\int_{\Omega} |\varphi(x', x_d)|^2 dx \right)^{1/2} \leq C \left(\int_{\Omega} |\partial_{x_d} \varphi(x', x_d)|^2 dx \right)^{1/2} \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi(x', x_d)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

□

On est donc maintenant capables de montrer le résultat suivant :

Théorème 1.1.11. *Soit f une fonction de $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$. Il existe une unique fonction u de $\mathbb{H}_0^1(]0, 1[)$ telle que*

$$-\int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx$$

pour toute fonction v dans $\mathbb{H}_0^1(]0, 1[)$. De plus la fonction u est l'unique minimum de la fonctionnelle Φ définie sur $\mathbb{H}_0^1(]0, 1[)$ par

$$\Phi(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 |v'(x)|^2 dx + \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Lax-Milgram sur $\mathbb{H}_0^1(]0, 1[)$ à la forme bilinéaire

$$a(\varphi, \psi) = \int_0^1 \varphi'(x)\psi'(x) dx$$

et à la forme linéaire

$$l(\psi) = - \int_0^1 \psi(x)f(x)dx.$$

La forme a est coercive en vertu de l'inégalité de Poincaré. $\square$

En fait, on voit dans la preuve du théorème 1.1.11 précédent que l'on a pas utilisé le fait que f soit dans $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$, mais seulement que la forme linéaire

$$\psi \mapsto \int_0^1 f(x)\psi(x)dx$$

soit définie et continue sur $\mathbb{H}^1(]0, 1[)$. Par conséquent, on peut généraliser le théorème 1.1.11 à des seconds membres plus généraux. On définit donc un espace plus grand que $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$.

Définition 1.1.12. On notera $\mathbb{H}^{-1}(]0, 1[)$ le dual de l'espace $\mathbb{H}_0^1(]0, 1[)$.

On est en fait dans la situation suivante :

$$\mathbb{H}_0^1 \subset \mathbb{L}^2 = (\mathbb{L}^2)' \subset (\mathbb{H}_0^1)'.$$

En effet, le théorème de Riesz permet d'identifier $\mathbb{L}^2$ et son dual. Ensuite, une forme linéaire continue sur $\mathbb{L}^2$ définit, par restriction, une forme linéaire sur $\mathbb{H}_0^1$. Par conséquent, on peut identifier $(\mathbb{L}^2)'$ à un sous-espace de $(\mathbb{H}_0^1)'$. En revanche, ces inclusions sont strictes. Par exemple, la forme linéaire

$$\delta_{x_0} : \psi \mapsto \psi(x_0)$$

n'est égale à aucune forme linéaire de la forme

$$\psi \mapsto \int_0^1 \psi(x)\varphi(x)dx.$$

Plus généralement, toutes les mesures finies sur $]0, 1[$ vont définir des éléments de $\mathbb{H}^{-1}$. Par ailleurs, certains éléments de $\mathbb{H}^{-1}$ ne sont pas définis par des mesures.

On peut en fait caractériser les éléments de $\mathbb{H}^{-1}$ de la manière suivante :

Propriété 1.1.13. Pour tout φ dans $\mathbb{H}^{-1}(]0, 1[)$ il existe une fonction Φ dans $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$ et une constante réelle c telles que pour tout ψ dans $\mathbb{H}_0^1(]0, 1[)$, on ait

$$\varphi(\psi) = - \int_0^1 \Phi(x)\psi'(x)dx.$$

Par abus de notation, on se permettra d'écrire

$$\varphi(\psi) = \int_0^1 \varphi(x)\psi(x)dx \text{ et } \Phi' = \varphi.$$

Autrement dit, les éléments de $\mathbb{H}^{-1}(]0, 1[)$ peuvent se comprendre comme les "dérivées" des éléments de $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$.

Démonstration. Soit φ un élément de $\mathbb{H}^{-1}(]0, 1[)$. Il s'agit donc d'une forme linéaire sur $\mathbb{H}_0^1(]0, 1[)$.

L'application T qui à ψ associe la fonction $\Psi(x) = \int_0^x \psi(y)dy$ est une isométrie surjective entre le sous-espace de $\mathbb{L}^2(]0, 1[)$

$$\mathbb{L}_0^2(]0, 1[) = \left\{ \psi \in \mathbb{L}^2(]0, 1[), \int_0^1 \psi(x)dx = 0 \right\}$$

et $\mathbb{H}_0^1(]0, 1[)$. La réciproque de T est l'application $\psi \mapsto \psi'$. Par conséquent, la composition $\varphi \circ T^{-1}$ est une forme linéaire continue sur $\mathbb{L}_0^2(]0, 1[)$. Le théorème de Riesz donne alors l'existence d'une unique fonction Φ de $\mathbb{L}_0^2(]0, 1[)$ telle que pour toute fonction ψ de $\mathbb{L}_0^2(]0, 1[)$, on ait :

$$\varphi \circ T^{-1}(\psi) = \int_0^1 \Phi(x)\psi(x)xdx.$$

On écrit alors

$$\varphi(\psi) = (\varphi \circ T^{-1})(T\psi) = (\varphi \circ T^{-1})(\psi') = \int_0^1 \Phi(x)\psi'(x)dx.$$

□

On peut également définir une décomposition en série de sinus pour les éléments de $\mathbb{H}^{-1}$:

Propriété 1.1.14. *Pour tout élément u de $\mathbb{H}^{-1}(]0, 1[)$, il existe une unique suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda_n|^2}{n^2} < \infty$$

telle que si (μ_n) est une suite vérifiant

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^2 n^2 < \infty,$$

alors

$$\int_0^1 u(x)v(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n.$$

On a, dans $\mathbb{H}^{-1}(]0, 1[)$,

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sqrt{2} \sin(nx).$$

Démonstration. Soit u dans $\mathbb{H}^{-1}(]0, 1[)$. On pose

$$\lambda_n = \int_0^1 u(x) \sqrt{2} \sin(n\pi x) dx.$$

On considère ensuite v dans $\mathbb{H}^1(]0, 1[)$, que l'on écrit sous la forme

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \sqrt{2} \sin(n\pi x).$$

Comme la série précédente converge dans $\mathbb{H}^1(]0, 1[)$ vers v , on a l'égalité

$$\int_0^1 v(x)u(x)dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^N \mu_n \sqrt{2} \sin(n\pi x) \right) u(x)dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \lambda_n \mu_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n.$$

Par conséquent, la série $\sum \lambda_n \mu_n$ converge, pour toute suite (μ_n) vérifiant $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\mu_n|^2 < \infty$. En écrivant $\lambda_n \mu_n = \frac{\lambda_n}{n} \times n \mu_n$, on voit que la série $\sum \frac{|\lambda_n|^2}{n^2}$ est convergente. $\square$

De la même manière, on peut en fait définir un espace $\mathbb{H}_0^s(]0, 1[)$ pour toute valeur de $s \geq 0$ par l'expression :

$$\mathbb{H}_0^s(]0, 1[) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sqrt{2} \sin(n\pi x) \in \mathbb{L}^2(]0, 1[), \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} |\lambda_n|^2 < \infty \right\}. \quad (1.1.10)$$

1.2 La dimension supérieure

La plupart des résultats de la partie précédentes peuvent se généraliser au cas multidimensionnel. On va donc considérer un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$. Certains des résultats ne seront valides que pour des ouverts réguliers. Nous ne définiront pas rigoureusement cette notion. Un ouvert régulier est à comprendre comme pouvant, en chaque point de son bord, être localement envoyé sur $]0, \infty[\times \mathbb{R}^{d-1}$ par une fonction régulière (de classe $\mathcal{C}^\infty$, par exemple).

On peut généraliser la décomposition en série de sinus au cas d'un ouvert quelconque.

Théorème 1.2.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Il existe une base Hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ telle que les fonctions e_n soient de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans Ω , s'annulent sur $\partial\Omega$ et vérifient*

$$\Delta e_n = \delta_n e_n,$$

où $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de réels positifs tendant vers ∞ .

Démonstration. Admis. $\square$

Ce théorème permet notamment de définir les espace $\mathbb{H}^s(\Omega)$ comme on l'a fait avec la formule (1.1.10).

Définition 1.2.2. *Pour $s \geq 0$ et Ω un ouvert borné, on définit l'espace $\mathbb{H}^s(\Omega)$ par la formule*

$$\mathbb{H}^s(\Omega) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n e_n \in \mathbb{L}^2(\Omega), \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^{2s} |\lambda_n|^2 < \infty \right\}$$

Maintenant on peut donner un résultat permettant de définir la restriction d'une fonction de $\mathbb{H}^s(\Omega)$ sur le bord de Ω . En effet, cette opération est évidente pour une fonction continue, mais on peut trouver dans $\mathbb{H}^s(\Omega)$ des fonctions qui ne sont pas continues. On se ramène donc au cas des fonctions continues par densité.

Propriété 1.2.3. *Il existe une unique application continue τ de $\mathbb{H}^s(\Omega)$ dans $\mathbb{H}^{s-1/2}(\partial\Omega)$ telle que si u est dans $\mathbb{H}^s(\Omega)$ et est continue, alors $\tau(u) = u|_{\partial\Omega}$. On appellera $\tau(u)$ la trace de u sur le bord de Ω . Pour simplifier, on écrira en général, par abus de notation $u|_{\partial\Omega}$, même si la fonction u n'est pas continue.*

De plus, toute fonction de $\mathbb{H}^{s-1/2}(\partial\Omega)$ est la trace d'une fonction de $\mathbb{H}^s(\Omega)$.

Démonstration. On ne fera la preuve que dans le cas où $\Omega =]0, \infty[\times \mathbb{R}^{d-1}$, et alors $\partial\Omega = \{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$, pour lequel on montre qu'une fonction $\mathbb{H}^1$ admet une trace $\mathbb{L}^2$. Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\bar{\Omega}$. On a l'égalité

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbb{L}^2(\partial\Omega)}^2 &= \int_{\partial\Omega} |u|^2 = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(0, x_2, \dots, x_d)|^2 dx_2 \dots dx_d \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_0^\infty \partial_{x_1} |u(x)|^2 dx_1 \right) dx_2 \dots dx_d \\ &= 2 \int_{\Omega} u(x) \partial_{x_1} u(x) dx \\ &\leq 2 \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 2 \|u\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Par densité de l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$, cette dernière inégalité montre que l'application

$$\begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) & \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega) \\ u & \mapsto u|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

se prolonge en une application linéaire continue de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbb{L}^2(\partial\Omega)$.

Le cas d'un ouvert régulier plus général se traite en envoyant localement le bord de Ω sur le bord du demi-espace $]0, \infty[\times \mathbb{R}^{d-1}$.

On ne démontrera pas que l'image de cette application est exactement $\mathbb{H}^{1/2}(\Omega)$. $\square$

On a alors tout les ingrédients pour montrer un résultat d'existence et unicité pour l'équation (1.0.1).

Théorème 1.2.4. *Soit f une fonction de $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. Il existe une unique fonction u de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ telle que pour tout v de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, on ait*

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

De plus, si f est dans $\mathbb{H}^s(\Omega)$, alors u est dans $\mathbb{H}^{s+2}(\Omega)$.

On fera attention au fait que la dernière partie de l'énoncé n'est pas évidente en dimension ≥ 2 . En effet, pour $d \geq 2$ le fait que Δu ait une certaine régularité ne donne a priori pas d'information sur toutes les dérivées secondes $\partial_i \partial_j u$.

Démonstration. La preuve de la première partie est essentiellement la même que celle du théorème 1.1.11.

Pour la régularité de la fonction u , on remarque que si le développement de f est donné par

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n,$$

alors celui de u est donné par

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{-2} \alpha_n e_n.$$

$\square$

1.2.1 Différentes conditions au bord

Conditions de Dirichlet

On appelle *condition de Dirichlet* une condition portant sur les valeurs prises par la fonction sur le bord de l'ouvert.

Théorème 1.2.5. *Soit g une fonction de $\mathbb{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ et f une fonction de $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. Alors il existe une unique fonction u de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ telle que*

– pour tout v de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = - \int_{\Omega} f(x)v(x) dx ;$$

– la trace de u sur $\partial\Omega$ est donnée par g .

Démonstration. Tout d'abord, on choisit une fonction $\tilde{g}$ de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ telle dont la trace soit donnée par g . Cette fonction existe en vertu de la proposition 1.2.3.

On va alors s'intéresser au problème résolu par $\bar{u} = u - \tilde{g}$. Si u est une solution du problème énoncé dans le théorème, alors d'une part $\bar{u}$ vérifie la formulation variationnelle

$$\forall v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla \bar{u}(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} (-f(x) + \Delta g(x)) v(x) dx ;$$

et de plus, la restriction de u sur le bord est donnée par $g - g = 0$. La fonction $\bar{u}$ est donc dans $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. La fonction $\tilde{g}$ étant dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$, on en déduit que Δg est dans $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. □

1.3 Dépendance par rapport aux paramètres

Une question naturelle est de savoir si la solution de l'équation (1.0.1) dépend continument de ses paramètres, ou autrement dit, si une petite erreur sur la valeur de f ou g se traduit par une petite erreur sur la valeur de u .

1.3.1 Continuité $\mathbb{L}^\infty$

On considère l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

On suppose que g est la trace sur $\partial\Omega$ d'une fonction de $\mathbb{H}^1(\Omega)$. Par conséquent, il existe une unique solution à la formulation variationnelle de cette équation.

On aura besoin du lemme suivant :

Lemme 1.3.1. *Si $v \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, la fonction $v^+ = \max(0, v)$ est une fonction de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ dont le gradient est donné par $\nabla v^+ = \mathbf{1}_{v \geq 0} \nabla v$.*

Démonstration. Admis. □

Théorème 1.3.2. *Soit u la solution de (1.3.1). Si $f \leq 0$ et $g \geq 0$, alors $u \geq 0$.*

Démonstration. La solution u de (1.3.1) est dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$. De plus, comme g est positif, la fonction u^- , qui est également dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ est nulle sur $\partial\Omega$, de sorte que u^- est dans $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. On peut donc appliquer la formulation variationnelle de l'équation à la fonction u^- pour obtenir

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla u^-(x) dx = \int_{\Omega} f(x) u^-(x) dx,$$

ce qui se réécrit

$$\int_{\Omega} \mathbf{1}_{u \leq 0} |\nabla u|^2(x) dx = \int_{\Omega} f(x) u^-(x) dx.$$

D'après les hypothèses sur le signe de f , le membre de droite est négatif, de sorte que les deux membres de l'égalité sont nuls. On en déduit donc que $\int_{\Omega} |\nabla u^+(x)| dx = 0$, ce qui signifie que la fonction u^+ est nulle sur Ω , autrement dit, que u est positive. $\square$

Corollaire 1.3.3. *Pour g dans $\mathbb{H}^{1/2}(\Omega)$, on note u la solution de*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega, \\ u(x) = g(x) & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Si g est borné, alors u l'est également, et de plus on a l'inégalité

$$\|u\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \leq \|g\|_{\mathbb{L}^\infty(\partial\Omega)}.$$

Cette inégalité signifie que la fonction qui à g associe u est continue pour la topologie $\mathbb{L}^\infty$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 1.3.2 aux fonctions $u - \min g$ et $u - \max g$. $\square$

On peut obtenir une autre version de cette continuité, pour une autre équation. Par le théorème de Lax-Milgram, on vérifie que, pour f une fonction de $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, l'équation

$$\begin{cases} u(x) - \Delta u(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.3.2)$$

est bien posée, au sens où il existe une unique fonction de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Théorème 1.3.4. *Pour f dans $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, on note u la solution de (1.3.2). Si f est positive alors u est positive.*

De plus, si f est bornée, alors u est également bornée, et il existe une constante C telle que pour tout f , on ait

$$\|u\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \leq C \|f\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}.$$

Démonstration. La fonction u^- est dans $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, on peut donc écrire la formulation variationnelle de l'équation avec u^- comme fonction test. On obtient alors

$$-\int_{\Omega} |u^-(x)|^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla u^-(x)|^2 dx = \int_{\Omega} f(x)u^-(x) dx.$$

Par hypothèse, la fonction u^- étant positive, le membre de droite est positif, et le membre de gauche est négatif. Par conséquent, les deux membres sont nuls, et on en déduit que u^- est la fonction nulle, autrement dit, que $u \geq 0$. $\square$

1.3.2 Continuité $\mathbb{L}^2$

Ensuite, la formulation variationnelle de l'équation permet de donner une stabilité dans $\mathbb{L}^2$ de la solution.

Propriété 1.3.5. *L'application de $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ qui à f associe la solution de*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

est continue. Plus précisément, il existe une constante C telle que pour tout f dans $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, on ait

$$\|u\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)}.$$

Démonstration. On écrit la formulation variationnelle de l'équation, avec u comme fonction test :

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = - \int_{\Omega} f(x)u(x) dx.$$

On a donc

$$\|u\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \leq C \|f\|_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)} \|u\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}.$$

$\square$

1.4 Résolution numérique

On a présenté dans la partie précédente un cadre théorique permettant de s'assurer qu'une équation elliptique admet une solution. On va maintenant présenter différentes méthodes numériques permettant de donner une estimation de cette solution.

Les exemples étudiés ici seront des exemples "simples", par exemple sur un segment ou un carré. La généralisation en dimension plus grande, ou à des ouverts plus complexes, peut se faire quitte à obtenir des expressions plus longues, mais sans réelle difficulté théorique supplémentaire.

1.4.1 La méthode des différences finies

On va discrétiser l'intervalle $\Omega = [0, 1]$ sous la forme $\Omega_N = \{0, \delta x, 2\delta x, \dots, (N+1)\delta x\}$, où $\delta x = \frac{1}{N+1}$. On cherche alors un analogue à l'équation (1.0.1) sur l'ensemble Ω_N . Deux approximations naturelles de la dérivée de u en un point sont données par

$$\delta_N u(k\delta x) = \frac{u((k+1)\delta x) - u(k\delta x)}{\delta x} \quad \text{et} \quad \bar{\delta}_N u(k\delta x) = \frac{u(k\delta x) - u((k-1)\delta x)}{\delta x}.$$

Il est donc naturel d'approcher la dérivée seconde par

$$\delta_N \bar{\delta}_N u(k\delta x) = \bar{\delta}_N \delta_N u(k\delta x) = \frac{u((k+1)\delta x) + u((k-1)\delta x) - 2u(k\delta x)}{\delta x^2}.$$

On cherche alors à résoudre l'équation suivante, où l'inconnue est $(u_i)_{i=0, \dots, N+1}$:

$$\begin{cases} \frac{u_{k+1} + u_{k-1} - 2u_k}{\delta x^2} = f(k\delta x) & \text{pour } k \in \{1, \dots, N\}, \\ u_0 = 0, \\ u_{N+1} = 0. \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Cette équation peut se récrire sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{1}{\delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\delta x) \\ f(2\delta x) \\ \vdots \\ f(N\delta x) \end{pmatrix}.$$

Pour que cette équation définisse bien une solution approchée $(u_n)_{n=0, \dots, N+1}$, quel que soit le second membre f , il faut que la matrice A_N de taille N définie par

$$A_N = \frac{1}{\delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

soit inversible. On présente deux manière de montrer l'inversibilité de cette matrice. Tout d'abord, on peut calculer explicitement le spectre de la matrice.

Propriété 1.4.1. *Les valeurs propres de A_N sont les $\frac{1}{\delta x^2} (1 - \cos(2\pi k\delta x))$, pour k variant de 1 à N , et les vecteurs propres associés sont les $(\sin(2k\pi q\delta x))_{q \in \{1, \dots, N\}}$.*

Démonstration. C'est un simple calcul, utilisant les formules trigonométriques. $\square$

Comme 0 n'est pas valeur propre, la propriété 1.4.1 assure l'inversibilité de la matrice A_N . On peut de plus remarquer que les éléments propres de A_N tendent, quand N tend vers l'infini vers les éléments propres du Laplacien calculés précédemment. En effet, à k fixé, la $k^{\text{ième}}$ valeur propre tend, quand $N \rightarrow \infty$, vers $-4\pi^2 k^2$ et le $k^{\text{ième}}$ vecteur propre tend vers $\sin(2\pi kx)$.

Une autre manière de montrer l'inversibilité de la matrice A_N est de montrer un équivalent discret au principe du maximum 1.3.2 qui permettra de montrer l'injectivité de la matrice.

Théorème 1.4.2 (Principe du maximum discret). *Soit $(u_n)_{n=1,\dots,N}$ un vecteur de taille N tel que les coefficients du vecteur $(f_n)_{n=1,\dots,N}$ défini par $(f_n) = A_N(u_n)$ soient positifs. Alors les coefficients du vecteur $(u_n)_{n=1,\dots,N}$ sont négatifs.*

Démonstration. On considère le plus petit entier $n_0 \in \{1, \dots, N\}$ tel que $u_{n_0} = \max_{n=1}^N u_n$. Si $n_0 = 1$, on a, par positivité de f_1 , et comme $u_1 \geq u_2$

$$0 \leq f_1 = \frac{u_2 - 2u_1}{\delta x^2} = \frac{1}{\delta x^2} ((u_2 - u_1) - u_1) \leq \frac{-u_1}{\delta x^2},$$

de sorte que $u_n \leq u_1 \leq 0$, pour tout n . Le même raisonnement marche pour $n_0 = N$. Enfin, si n_0 est différent de 1 et de N , on a alors $u_{n_0-1} < u_{n_0}$, de sorte que

$$0 \leq f_{n_0} = \frac{u_{n_0+1} + u_{n_0-1} - 2u_{n_0}}{\delta x^2} = \frac{1}{\delta x^2} ((u_{n_0-1} - u_{n_0}) + (u_{n_0+1} - u_{n_0})) < \frac{1}{\delta x^2} (u_{n_0+1} - u_{n_0}) \leq 0,$$

ce qui est contradictoire. $\square$

La proposition suivante montre que le principe du maximum discret donne l'unicité pour la solution du schéma. Comme on a affaire à une équation linéaire en dimension finie, on a aussi l'existence :

Propriété 1.4.3. *La matrice A_N est inversible. Autrement dit, il existe, pour un vecteur $(f_n)_{n=1,\dots,N}$, il existe une unique solution $(u_n)_{n=0,\dots,N+1}$ au problème (1.4.1).*

Démonstration. Soient $(u_n)_{n=1,\dots,N}$ et $(v_n)_{n=1,\dots,N}$ deux solutions de l'équation (1.4.1). Par linéarité, on a

$$A_N(u - v) = f - f = 0,$$

qui est un vecteur positif. Par conséquent, le principe du maximum discret nous donne l'inégalité

$$\forall n \in \{1, \dots, N\}, u_n \leq v_n.$$

Par symétrie du raisonnement, on a l'inégalité inverse, de sorte que les vecteurs u et v sont égaux. $\square$

Convergence du schéma

Maintenant que l'on sait que le schéma numérique (1.4.1) *définit* bien une solution approchée, la question à se poser est de savoir si cette solution va effectivement être proche de la vraie solution de l'équation (1.0.1).

Définition 1.4.4. – On appelle erreur de consistance la valeur obtenue en remplaçant la “vraie” solution de l’équation à résoudre dans le schéma. Dans notre cas, cette erreur est donnée par

$$\eta_i = \frac{u((i-1)\delta x) + u((i+1)\delta x) - 2u(i\delta x)}{\delta x^2} - f(i\delta x), \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, N\},$$

où u est une solution de (1.0.1) ;

– On dit que le schéma est consistant si l’erreur de consistance tend vers 0 :

$$\max_{i=1}^N |\eta_i| \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0 ;$$

– On dit que le schéma est consistant d’ordre p si l’erreur de consistance vérifie :

$$\max_{i=1}^N |\eta_i| \rightarrow_{N \rightarrow \infty} = \mathcal{O}(\delta x^p).$$

Il faut comprendre qu’un schéma consistant est simplement un schéma qui résout la bonne équation. On s’intéresse à la consistance du schéma (1.4.1).

Propriété 1.4.5. Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, alors le schéma (1.4.1) est consistant d’ordre 1.

Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$, alors le schéma (1.4.1) est consistant d’ordre 2.

Enfin, si f est une fonction affine, alors le schéma (1.4.1) est exact (on a $u_n = u(n\delta x)$).

Démonstration. Si le second membre f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, alors la solution u est de classe $\mathcal{C}^3$ et on peut effectuer un développement de Taylor-Lagrange de u autour du point $i\delta x$ à l’ordre 3 :

$$u((i+1)\delta x) = u(i\delta x) + \delta x \partial_x u(i\delta x) + \frac{\delta x^2}{2} \partial_x^2 u(i\delta x) + \frac{\delta x^3}{6} \partial_x^3 u(\tilde{x}).$$

et

$$u((i-1)\delta x) = u(i\delta x) - \delta x \partial_x u(i\delta x) + \frac{\delta x^2}{2} \partial_x^2 u(i\delta x) - \frac{\delta x^3}{6} \partial_x^3 u(\bar{x}),$$

où $\tilde{x}$ et $\bar{x}$ sont deux éléments de $[(i-1)\delta x, (i+1)\delta x]$. De plus, on a l’égalité $\partial_x^2 u = f$. On a alors

$$\begin{aligned} |\eta_i| &= \left| \frac{u((i+1)\delta x) + u((i-1)\delta x) - 2u(i\delta x)}{\delta x^2} - f(i\delta x) \right| \\ &= \left| \partial_x^2 u(i\delta x) - f(i\delta x) + \frac{\delta x}{6} \partial_x^3 u(\tilde{x}) - \frac{\delta x}{6} \partial_x^3 u(\bar{x}) \right| \\ &\leq \frac{\delta x}{3} \sup_{[0,1]} |f'|. \end{aligned}$$

Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$, on peut pousser le développement un terme plus loin, et les deux termes en $\pm \delta x \partial_x^3 u(i\delta x)$ se compensent, et on obtient

$$|\eta_i| \leq \frac{\delta x^2}{12} \sup_{[0,1]} |f''|.$$

Si la fonction f est affine, la quantité $\sup_{[0,1]} |f''|$ est nulle de sorte que la solution exacte est solution du schéma numérique. $\square$

Définition 1.4.6. On dit qu'un schéma numérique est stable (pour une certaine norme) si la solution du schéma est continue par rapport aux données. Le schéma (1.4.1) est donc stable pour la norme $\|\cdot\|$ si il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout f , on ait

$$\|(u_i)_{i=1,\dots,N}\| \leq C \|(f(i\delta x))_{i=1,\dots,N}\|.$$

Propriété 1.4.7. Le schéma (1.4.1) est stable pour la norme $\mathbb{L}^\infty$. Plus précisément, on a, pour tout f borné, l'inégalité

$$\max_{i=1}^N |u_i| \leq \frac{1}{8} \sup |f|.$$

Démonstration. On va utiliser le principe du maximum discret 1.4.2. Tout d'abord, on remarque que la solution approchée obtenue si le second membre est la constante 1 est $e_i = -\frac{1}{2}(i\delta x)(1 - i\delta x)$. En effet, le second membre est alors affine, et l'on a vu en proposition 1.4.5 que le schéma était exact pour un second membre affine. On a donc $|e_i| \leq \max \frac{1}{2}|x(1-x)| = \frac{1}{8}$.

Passons maintenant au cas d'un second membre quelconque. On a l'inégalité $-\sup |f| \leq f \leq \sup |f|$. Le principe du maximum discret montre que l'application qui au second membre associe la solution approchée est décroissante, de sorte que l'on ait l'inégalité

$$e_i \sup |f| \leq u_i \leq -e_i \sup |f|.$$

Comme les coefficients e_i sont majorés par $\frac{1}{8}$, on a bien la majoration annoncée. $\square$

Définition 1.4.8. – On appelle erreur de convergence, ou erreur de discrétisation la différence entre la “vraie” solution de l'équation et la solution approchée donnée par le schéma. Dans notre cas, cette erreur est donnée par

$$\varepsilon_i = u_i - u(i\delta x);$$

– On dit que le schéma est convergent si l'erreur de discrétisation tend vers 0 :

$$\max_{i=1}^N |\varepsilon_i| \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0;$$

– On dit que le schéma est convergent d'ordre p si l'erreur de discrétisation vérifie :

$$\max_{i=1}^N |\varepsilon_i| \rightarrow_{N \rightarrow \infty} = \mathcal{O}(\delta x^p).$$

Propriété 1.4.9. Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, alors le schéma (1.4.1) est convergent d'ordre 1.

Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, alors le schéma (1.4.1) est convergent d'ordre 2.

Enfin, si f est une fonction affine, alors le schéma (1.4.1) donne la solution exacte.

La preuve de ce résultat va se baser sur le principe général selon lequel un schéma stable et consistant est convergent.

Démonstration. L'erreur de discrétisation est donnée par

$$\varepsilon_i = u(i\delta x) - u_i.$$

Le vecteur $(u_i)_{i=1,\dots,N}$ étant solution du schéma, on a l'égalité

$$A_N(u_i)_{i=1,\dots,N} = (f(i\delta x))_{i=1,\dots,N}.$$

Par définition de l'erreur de consistance, on a donc

$$\begin{aligned} A_N(\varepsilon_i)_{i=1,\dots,N} &= A_N(u(i\delta x))_{i=1,\dots,N} - A_N(u_i)_{i=1,\dots,N} \\ &= A_N(u(i\delta x))_{i=1,\dots,N} - (f(i\delta x))_{i=1,\dots,N} \\ &= (\eta_i)_{i=1,\dots,N}. \end{aligned}$$

On en déduit, à l'aide de la propriété de stabilité énoncée en proposition 1.4.7

$$\max |\varepsilon_i| \leq \frac{1}{8} \max |\eta_i|.$$

On en déduit que le schéma (1.4.1) est convergent avec les mêmes ordre de convergence que les ordres de consistance donnés en proposition 1.4.5. $\square$

La dimension supérieure

En dimension supérieure, les résultats présentés à la section précédente resteront toujours vrais, pour peu que l'on prenne un domaine Ω se laissant suffisamment bien approcher par une grille de discrétisation.

En revanche, écrire le problème devient plus complexe, surtout si la dimension est "grande" (c'est-à-dire essentiellement $d \geq 4$). Par ailleurs, le coût de discrétisation est d'autant plus grand que la dimension du problème est grande : pour un pas de discrétisation δx , le nombre de points de discrétisation à considérer est de l'ordre de δx^{-d} .

On va donc se limiter ici au cas du carré en dimension 2 : $\Omega = [0, 1]^2$. On va approcher le carré par la famille des couple

$$x_i = i\delta x, y_j = j\delta x, i \in \{0, \dots, N+1\}, j \in \{0, \dots, M+1\},$$

avec $\delta x = \frac{1}{N+1}$. L'opérateur $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ est naturellement approché par l'opérateur discret D_N qui au vecteur

$$(u_{n,m})_{n=0,\dots,N+1, m=0,\dots,N+1}$$

associe le vecteur

$$\left(\frac{1}{\delta x^2} (u_{n+1,m} + u_{n-1,m} + u_{n,m+1} + u_{n,m-1} - 4u_{n,m}) \right)_{n=1,\dots,N, m=1,\dots,N}.$$

La condition au bord s'écrit

$$\forall 1 \leq n, m \leq N, u_{0,m} = u_{N+1,m} = u_{n,0} = u_{n,N+1},$$

de sorte que les inconnues de l'équation sont les coefficients $(u_{n,m})_{n=1,\dots,N, m=1,\dots,N}$, qui ne sont pas immédiatement donnés sous la forme d'un vecteur colonne. En assimilant ces coefficients au vecteur

$$(u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{1,N}, u_{2,1}, u_{2,2}, \dots, u_{2,N}, \dots, u_{N,1}, \dots, u_{N,N}),$$

on vérifie que le schéma numérique a pour matrice la matrice composée de $N \times N$ blocs de taille $N \times N$

$$A = \frac{1}{\delta x^2} \begin{pmatrix} T & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & T & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & T & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & T \end{pmatrix}$$

où I est la matrice identité de taille N et T est la matrice tridiagonale donnée par :

$$T = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

1.4.2 La méthode des éléments finis

Dans cette partie nous allons présenter la méthode des éléments finis. Le principe de cette méthode est de discrétiser, non pas l'espace des variables x , mais directement l'espace de fonction dans lequel on travaille, ici, principalement $\mathbb{H}^1$.

Formellement, on cherche à résoudre le problème

$$\forall v \in H, a(u, v) = l(v),$$

et on va pour cela résoudre le problème approché

$$\forall v \in H_h, a(u, v) = l(v), \quad (1.4.2)$$

où H_h aura vocation à être un sous-espace de H , de dimension finie, et “tendant” vers H lorsque $h \rightarrow 0$. L'espace H_h étant de dimension finie, le problème (1.4.2) a l'avantage de pouvoir être représenté et résolu informatiquement de manière exacte (aux erreurs d'arrondi près) : en effet ce problème revient à celui d'une inversion de matrice.

Dans la suite, on va faire les hypothèses suivantes sur la famille $(H_h)_{h>0}$:

- L'espace H_h est un sous-espace de H de dimension finie ;
- pour tout u dans H , on a la propriété

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{u_h \in H_h} \|u - u_h\|_H = 0.$$

Lemme 1.4.10. *On se place sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram. Les deux problèmes*

$$\forall v \in H, a(u, v) = l(v)$$

et

$$\forall v_h \in H_h, a(u_h, v_h) = l(v_h)$$

ont alors des solutions uniques. Il existe une constante C telle que ces solutions vérifient

$$\|u - u_h\| \leq C \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|.$$

Démonstration. Pour v_h dans H_h , on a

$$a(u, v_h) = l(v_h) \text{ et } a(u_h, v_h) = l(v_h)$$

de sorte que $a(u - u_h, v_h) = 0$. Notamment on a

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) = a(u - u_h, u - v_h).$$

En utilisant la continuité et la coercivité de a , on trouve, pour deux constantes c_1 et c_2

$$c_1 \|u - u_h\|^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq c_2 \|u - u_h\| \|u - v_h\|,$$

ce qui achève la démonstration, avec $C = \frac{c_2}{c_1}$. □

Étudions maintenant la forme que prend le problème (1.4.2). On considère une base $(e_n^h)_{n=1, \dots, N_h}$ de H_h . On a alors, pour $u = \sum_{n=1}^{N_h} u_n e_n^h$ et $v = \sum_{n=1}^{N_h} v_n e_n^h$

$$a(u, v) = \sum_{1 \leq n, m \leq N_h} u_n v_m a(e_n^h, e_m^h)$$

et

$$l(v) = \sum_{n=1}^{N_h} v_n l(e_n^h).$$

L'équation $a(u, v) = l(v)$ se réécrit donc

$$U^T A V = L^T V,$$

où U et V sont les vecteurs colonnes dont les coefficients sont donnés par $(u_n)_{n=1, \dots, N_h}$ et $(v_n)_{n=1, \dots, N_h}$, A est la matrice définie par $A_{nm} = a(e_n^h, e_m^h)$ et L est le vecteur de coordonnées $(l(e_n^h))_{n=1, \dots, N_h}$. Le vecteur u est donc solution de (1.4.2) si et seulement si $A^T U = L$. La résolution de ce système dépend donc de l'inversibilité de la matrice A .

Propriété 1.4.11. *La matrice A est inversible.*

Démonstration. La matrice A étant la matrice de la forme quadratique a dans la base $(e_n^h)_{n=1, \dots, N_h}$, c'est une matrice symétrique définie positive (puisque a est coercive). Elle est donc inversible. □

Un exemple

Pour résoudre le problème

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0, \end{cases}$$

on va utiliser les espaces suivants. On note H_N l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, nulles en 0 et en 1 et affines sur chaque intervalle $[\frac{k-1}{N+1}, \frac{k}{N+1}]$, avec $k = 1, \dots, N+1$. On posera dans la suite $\delta x = \frac{1}{N+1}$, de sorte que les fonctions de H_N sont affines sur les $[(k-1)\delta x, k\delta x]$.

L'espace H_N est bien un sous-espace de $\mathbb{H}_0^1(]0, 1[)$, de dimension finie (elle vaut N). De plus la suite (H_N) "tend" vers $\mathbb{H}_0^1(]0, 1[)$ au sens où $\cup_{N \geq 1} H_N$ est dense dans $\mathbb{H}_0^1(]0, 1[)$.

Une base simple de H_N est donnée par la famille $(e_k^N)_{k=1, \dots, N}$, où e_k^N est nulle en chaque $q\delta x$ pour $0 \leq q \leq N+1$, et $q \neq k$ et vaut 1 en $k\delta x$. On peut calculer les dérivées de ces vecteurs de base. On a en effet

$$(e_k^N)' = \frac{1}{\delta x} (\mathbf{1}_{[k\delta x, (k+1)\delta x]} - \mathbf{1}_{[(k-1)\delta x, k\delta x]}).$$

Il reste à calculer la matrice A du problème (1.4.2). On trouve

$$A = \frac{1}{\delta x} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Comme montré dans les propriétés 1.4.1 ou 1.4.3, cette matrice est inversible, ce qui correspond bien au cas général donné par la propriété 1.4.11.

Le second membre du problème va être donné par le vecteur de coordonnées

$$\int_0^1 e_k^N(x) f(x) dx = \int_{(k-1)\delta x}^{(k+1)\delta x} e_k^N(x) f(x) dx$$

On voit que si f est continue, ce vecteur vaut approximativement $(\delta x f(i\delta x))$, et que le système d'équation à résoudre est proche de celui obtenu par la méthode des différences finies.

Estimation de l'erreur

En vertu du lemme 1.4.10, il suffit de majorer la quantité $\inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|$ pour obtenir une majoration de l'erreur dans la méthode des éléments finis. Dans le cas de la dimension 1 et pour un espace d'élément finis $H_{\delta x}$ défini comme l'espace des fonction affines par morceaux sur la subdivision $0 < \delta x < \dots < N\delta x < 1$ (avec $\delta x = \frac{1}{N+1}$) et continues, on a le résultat suivant.

Propriété 1.4.12. Soit u une fonction de $\mathbb{H}_0^1(]0, 1[) \cap \mathbb{H}^2(]0, 1[)$. Alors on a l'estimation

$$\inf_{v_{\delta x} \in H_{\delta x}} \|u - v_{\delta x}\|_{\mathbb{H}^1(]0, 1[)} \leq \delta x \|u\|_{\mathbb{H}^2(]0, 1[)}.$$

Démonstration. Considérons une fonction u de classe $\mathcal{C}^2$. On note

$$I_h u = \sum_{k=1}^N u(k\delta x) e_k^N$$

l'unique fonction affine par morceaux sur la subdivision $0 < \delta x < \dots < N\delta x < 1$ coïncidant avec la fonction u en les points $k\delta x$. On a alors

$$(I_{\delta x} u)'(x) = \frac{u((k+1)\delta x) - u(k\delta x)}{\delta x}$$

si $x \in]k\delta x, (k+1)\delta x[$, de sorte que

$$(u - I_{\delta x} u)'(x) = u'(x) - \frac{u((k+1)\delta x) - u(k\delta x)}{\delta x}.$$

La fonction u étant supposée de classe $\mathcal{C}^2$, un développement de Taylor au voisinage de x donne

$$u((k+1)\delta x) - u(x) = ((k+1)\delta x - x)u'(x) + \int_x^{(k+1)\delta x} u''(y)((k+1)\delta x - y)dy$$

et

$$u(k\delta x) - u(x) = (k\delta x - x)u'(x) + \int_x^{k\delta x} u''(y)(k\delta x - y)dy.$$

On obtient donc

$$u((k+1)\delta x) - u(k\delta x) = \delta x u'(x) + \int_x^{(k+1)\delta x} u''(y)((k+1)\delta x - y)dy - \int_x^{k\delta x} u''(y)(k\delta x - y)dy.$$

Enfin, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left| \int_x^{(k+1)\delta x} u''(y)((k+1)\delta x - y)dy \right|^2 \leq \frac{|(k+1)\delta x - x|^3}{3} \int_x^{(k+1)\delta x} |u''(y)|^2 dy$$

et

$$\left| \int_x^{k\delta x} u''(y)(k\delta x - y)dy \right|^2 \leq \frac{|x - k\delta x|^3}{3} \int_{k\delta x}^x |u''(y)|^2 dy.$$

En regroupant les inégalités précédentes, on obtient

$$\left| u'(x) - \frac{u((k+1)\delta x) - u(k\delta x)}{\delta x} \right|^2 \leq \frac{2\delta x}{3} \int_{k\delta x}^{(k+1)\delta x} |u''(y)|^2 dy.$$

En intégrant sur $[0, 1]$, on obtient

$$\int_0^1 |(u - I_{\delta x} u)'(y)|^2 dy \leq \frac{2\delta x^2}{3} \int_0^1 |u''(y)|^2 dy.$$

Par densité de l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{H}^2(]0, 1[)$, on obtient la même majoration dans $\mathbb{H}^2(]0, 1[)$.

On conclut avec l'inégalité de Poincaré :

$$\inf_{v_{\delta x} \in H_{\delta x}} \|u - v_{\delta x}\|_{\mathbb{H}^1(]0,1])} \leq \|u - I_{\delta x}u\|_{\mathbb{H}^1(]0,1])} \leq C\|(u - I_{\delta x}u)'\|_{\mathbb{L}^2(]0,1])} \leq C\delta x \|u\|_{\mathbb{H}^2(]0,1])}.$$

□

On peut généraliser la proposition 1.4.12 de la façon suivante : on considère une partition $\mathcal{T}_h$ de l'ouvert Ω par des polygones de diamètre inférieur à h . On note $\mathcal{P}_h^k$ l'espace des fonctions polynômiales de degré k par morceaux sur la partition $\mathcal{T}_h$.

Propriété 1.4.13. *Soit $0 \leq l \leq m \leq k + 1$. Il existe une constante C telle que, pour toute fonction u de $\mathbb{H}^m(\Omega)$, on ait*

$$\inf_{u_h \in \mathcal{P}_h^k} \|u - u_h\|_{\mathbb{H}^l(\Omega)} \leq Ch^{m-l} \|u\|_{\mathbb{H}^m(\Omega)},$$

où l'on a noté

$$\|u\|_{\mathbb{H}^l(\Omega)}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{|\alpha|=l} \int_K |\partial_\alpha u(x)|^2 dx.$$

Par exemple, pour une fonction de $\mathbb{H}^2$, l'approximation par les polynômes de degré 1 est d'ordre 1 dans $\mathbb{H}^1$ et d'ordre 2 dans $\mathbb{L}^2$:

$$\inf_{u_h \in \mathcal{P}_h^k} \|u - u_h\|_{\mathbb{H}^1} \leq Ch \|u\|_{\mathbb{H}^2}, \text{ et } \inf_{u_h \in \mathcal{P}_h^k} \|u - u_h\|_{\mathbb{L}^2} \leq Ch^2 \|u\|_{\mathbb{H}^2}.$$

Chapitre 2

Équations aux dérivées partielles paraboliques

Nous allons nous intéresser à un exemple typique d'équation aux dérivées partielles : l'équation de la chaleur, ou équation de diffusion. Cette équation s'écrit

$$\partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = f(t, x), \quad (2.0.1)$$

où $\Delta = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2$ est l'opérateur Laplacien, et le couple (t, x) est dans $[0, \infty[\times \Omega$, ou Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. La fonction f est une donnée du problème. Cette équation est de plus assortie d'une condition initiale

$$u(0, x) = v(x), \text{ pour } x \in \Omega,$$

et d'une condition aux limites

$$u(t, x) = g(t, x) \text{ pour } (t, x) \in]0, T[\times \partial\Omega$$

où v et g sont des fonctions données.

Cette équation est le prototype des équations dites *équations parabolique*. Le terme "parabolique" vient du fait que le membre de gauche s'écrit en dimension 1 comme $(\partial_t - \partial_x^2)f$, à rapprocher de l'équation $y - x^2 = 0$ de la parabole.

Une des interprétations possibles de l'équation (2.0.1) est la modélisation d'un flux de chaleur dans un corps. Voici l'interprétation de chaque terme de l'équation :

- le terme $\partial_t u$ permet de décrire l'évolution de la distribution de chaleur au cours du temps. Notamment, on s'attend à pouvoir définir la valeur d'une solution à un temps $t > 0$ quelconque en connaissant la distribution à l'instant $t = 0$.
- le terme Δu correspond à une variation de u par rapport à sa moyenne locale. Un point x où $\Delta u(x) > 0$ est un point plus froid que son entourage direct (et dont la température va augmenter), et inversement. Ce terme correspond donc à un phénomène de moyenne, et va avoir tendance à rendre régulières les solutions de l'équation.
- le terme v correspond à la distribution de chaleur à l'instant initial.
- le terme g correspond à un thermostat situé sur le bord de l'ouvert et imposant sa température à la frontière du système.

La première question à se poser avant la résolution du problème (2.0.1) est de savoir quel sens donner à cette équation. Le sens le plus naturel est de considérer qu'une fonction $u : [0, \infty[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est solution si elle est dérivable par rapport à t en tout point, qu'elle admet une dérivée seconde par rapport à chaque x_i en tout point et que les dérivées soient reliées par la relation (2.0.1) quel que soit le point (t, x) . Il apparaîtra que cette définition est trop restrictive, car elle ne permet de considérer que des fonctions régulières car cette approche est trop "ponctuelle" : on considère une par une les valeurs prises par la fonction. Une meilleure façon de faire est de considérer la solution u comme un tout et non comme une collection de valeur $u(t, x)$.

La notion de solution que l'on va considérer s'obtient en considérant les valeurs prises par la quantité $\int_{\Omega} u(t, x)\varphi(x)dx$, pour une certaine collection de *fonctions test* φ . On dit que l'on considère des *solutions faibles*. Pour étudier ces quantités, il suffit de multiplier l'équation de la chaleur par φ , puis d'intégrer par rapport à x . On obtient alors

$$\int_{\Omega} \partial_t u(t, x)\varphi(x)dx - \int_{\Omega} \Delta u(t, x)\varphi(x)dx = \int_{\Omega} f(t, x)\varphi(x)dx.$$

En intégrant par partie, on obtient, si l'on suppose φ nulle sur le bord $\partial\Omega$,

$$\int_{\Omega} \partial_t u(t, x)\varphi(x)dx + \int_{\Omega} \nabla u(t, x) \cdot \nabla \varphi(x)dx = \int_{\Omega} f(t, x)\varphi(x)dx. \quad (2.0.2)$$

On *définira* donc une solution de l'équation (2.0.1) comme une fonction vérifiant l'égalité (2.0.2) pour toutes les fonctions φ d'une certaine classe. La question importante est donc de choisir les bons espaces dans lesquels doivent vivre les fonctions $u(t, \cdot)$, $\partial_t u(t, \cdot)$ et φ pour que l'égalité (2.0.2) ait un sens. L'esquisse de définition (2.0.2) fait intervenir des intégrales sur Ω du produit de deux fonctions. Un cas où ces intégrales sont bien définies est le cas où l'une des fonctions est dans l'espace $\mathbb{L}^p(\Omega)$ et l'autre est dans l'espace $\mathbb{L}^q(\Omega)$, où p et q satisfont la relation $1/p + 1/q = 1$. Si on veut avoir une expression symétrique où ces deux espaces seraient égaux, il suffit de considérer l'espace $\mathbb{L}^2(\Omega)$ des fonctions de carré intégrable. En effet, si u et v sont deux fonctions de $\mathbb{L}^2(\Omega)$, l'intégrale $\int_{\Omega} u(x)v(x)dx$ est bien définie.

L'expression (2.0.2) fait également intervenir l'intégrale $\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx$. Au vu de ce que l'on vient de dire, l'hypothèse naturelle est donc que les fonction ∇u et ∇v soient des fonctions de $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

On a donc besoin d'objets qui sont des fonctions dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et dont le gradient est dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Ces objets ne peuvent pas être définis à l'aide de dérivée ponctuelles, car les fonctions de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ peuvent très bien ne pas être dérivables en tout point (loin de là!). La théorie des *espaces de Sobolev* est le bon cadre pour définir ces objets.

2.1 Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$

On va s'intéresser à la résolution de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, on a un outil puissant, qui va avoir le même rôle que les séries de Fourier dans le cas périodique : la transformée de Fourier.

La transformée de Fourier d'une fonction f de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ est donnée par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\xi x} dx.$$

Le rôle de la transformée de Fourier dans l'équation de la chaleur est du à la propriété suivante :

Propriété 2.1.1. Si f est une fonction de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto xf(x)$ soit aussi dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a

$$(\hat{f})'(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale : en effet la fonction $\xi \mapsto f(x)e^{ix\xi}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est donnée par la fonction intégrable (en x) $ixf(x)e^{ix\xi}$. Par conséquent $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est donnée par

$$(\hat{f})'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \partial_{\xi} (f(x)e^{ix\xi}) dx = \int_{\mathbb{R}} ixf(x)e^{ix\xi} dx = i\xi\hat{f}(\xi).$$

□

Par conséquent on a, pour f intégrable telle que x^2f soit intégrable, l'identité

$$\Delta\hat{f}(\xi) = -\xi^2\hat{f}(\xi).$$

2.2 Formulation variationnelle

On va considérer dans cette partie l'équation de la chaleur dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^d$, sur un intervalle de temps $[0, T]$, avec condition nulle au bord (ou *conditions de Dirichlet homogène*). On cherche donc une solution au problème

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = f(t, x) & \text{pour } (t, x) \in]0, T] \times \Omega \\ u(t, x) = 0 & \text{pour } (t, x) \in]0, T] \times \partial\Omega \\ u(0, x) = v(x), & \text{pour } x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Une étape importante pour la résolution d'une équation aux dérivées partielles est de choisir le bon espace dans lequel les éventuelles solutions vont être cherchées. Pour l'instant, nous allons faire les calculs de manière formelle, puis nous allons observer dans quel espace doit être chaque terme pour donner un sens rigoureux au calcul.

Vu que l'on cherche une solution nulle sur le bord, l'espace naturel à considérer est l'espace $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. La formulation variationnelle de ce problème s'obtient en multipliant l'équation par une fonction test φ de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ en intégrant en espace et en intégrant par parties. En effet, la formule d'intégration par parties s'écrit dans un ouvert Ω comme

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \partial_n u(x)v(x)dx.$$

La formulation variationnelle associée au problème (2.2.1) est alors la suivante.

Définition 2.2.1. Supposons que f est un élément de $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ et que v est un élément de $\mathbb{L}^2(\Omega)$. On dit qu'une fonction u est solution variationnelle au problème (2.2.1) si elle vérifie

- u est dans $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ et $\partial_t u$ est dans $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$;
- pour toute fonction φ de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, on a pour presque tout $t \in]0, T[$

$$\int_{\Omega} \partial_t u(t, x)\varphi(x)dx + \int_{\Omega} \nabla u(t, x) \cdot \nabla \varphi(x)dx = \int_{\Omega} f(t, x)\varphi(x)dx ; \quad (2.2.2)$$

– la condition initiale de u est

$$u(0, \cdot) = v.$$

Quelques remarques :

– Pour un espace de Hilbert H , l'espace $\mathbb{L}^2(]0, T[, H)$ est défini comme l'ensemble des (classes d'équivalence de) fonctions u de $]0, T[$ dans H telles que

$$\int_0^T \|u(t)\|_H^2 dt < \infty ;$$

– Si H est un espace de Hilbert, et H' est son dual, pour deux fonctions u et v appartenant respectivement aux espaces $\mathbb{L}^2(]0, T[, H)$ et $\mathbb{L}^2(]0, T[, H')$, on peut définir la quantité

$$\int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_{H, H'} dt ;$$

– La formulation variationnelle prend cette forme après intégration par parties car la quantité

$$\int_{\partial\Omega} \partial_n u(x) v(x) dx$$

s'annule pour $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$;

– La troisième condition à un sens en vertu du lemme 2.2.2 suivant ;

– Les hypothèses de régularité sur chaque terme correspondent à des hypothèses naturelles pour donner un sens à la formulation (2.2.2).

Lemme 2.2.2. *Soit u une fonction de $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ telle que $\partial_t u$ soit dans $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Alors u s'identifie à une fonction de $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{L}^2(\Omega))$ vérifiant*

$$\|u(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 - \|u(0, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 = 2 \int_0^t \int_{\Omega} u(s, x) \partial_t u(s, x) dx ds.$$

Démonstration. Admis. □

Le lemme 2.2.2 permet d'obtenir de la régularité par rapport au couple (t, x) à partir d'hypothèse de régularité en x et en t . En effet, l'espace $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ est un espace de fonctions régulières en espace mais pas forcément en temps, alors qu'une fonction vérifiant $\partial_t u \in \mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ est régulière en temps mais pas forcément en espace. La conclusion du lemme donne une régularité modérée en chacune des variables.

Théorème 2.2.3. *Le problème (2.2.1) admet une unique solution variationnelle u au sens de la définition 2.2.1. De plus, si la fonction f est dans $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{L}^2(\Omega))$, alors la fonction u vérifie, pour une certaine constante $C > 0$, l'inégalité suivante, appelée estimation a priori,*

$$\|u(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u(s, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds \leq \|v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \|f(s, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds. \quad (2.2.3)$$

Démonstration. On commence tout d'abord par montrer l'estimation a priori (2.2.3) dans le cas où le second membre f est dans $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{L}^2(\Omega))$. Soit u une solution de la formulation variationnelle. On peut prendre, pour tout t , φ la fonction $u(t, \cdot)$ comme fonction test. On obtient alors la relation

$$\frac{1}{2} \partial_t \int_{\Omega} |u(t, x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(t, x)|^2 dx = \int_{\Omega} f(t, x) u(t, x) dx,$$

vraie pour presque tout t . Or on a, par Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Poincaré, (la valeur de $C > 0$ change de ligne en ligne)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(t, x) u(t, x) dx &\leq \left(\int_{\Omega} |f(t, x)|^2 dx \int_{\Omega} |u(t, x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} |f(t, x)|^2 dx \int_{\Omega} |\nabla u(t, x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(t, x)|^2 dx + C \int_{\Omega} |f(t, x)|^2 dx. \end{aligned}$$

On a donc

$$\partial_t \int_{\Omega} |u(t, x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(t, x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |f(t, x)|^2 dx.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et t , on obtient

$$\|u(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u(s, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds \leq C \|v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|f(s, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds.$$

Montrons maintenant l'unicité de la solution. Si u_1 et u_2 sont deux solutions, alors $u_1 - u_2$ est solution variationnelle de l'équation de la chaleur avec $v = 0$ et $f = 0$. La fonction nulle f est bien dans $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{L}^2(\Omega))$ et l'estimation a priori est donc vérifiée dans ce cas, où elle se récrit

$$\|u_1(t, \cdot) - u_2(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u_1(s, \cdot) - \nabla u_2(s, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds \leq 0,$$

pour tout $t > 0$. Donc $u_1(t, \cdot) = u_2(t, \cdot)$ pour tout $t > 0$.

Il reste maintenant à montrer l'existence de la solution. On va tout d'abord prouver l'existence d'une solution sous l'hypothèse $f \in \mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{L}^2(\Omega))$. On va pour cela utiliser une méthode de Galerkin, c'est à dire que l'on va utiliser un problème approché de dimension fini, qui aura une unique solution, et on va montrer que la solution du problème approché converge. La limite obtenue sera une solution du problème initial.

L'espace $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ étant un espace de Hilbert séparable, il admet une base Hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On peut alors considérer les espaces $V_n = \text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$, qui sont des approximations de l'espace $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Notamment l'union $\bigcup_n V_n$ est dense dans $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

On s'intéresse alors une solution u_n au problème approché suivant, qui a le bon goût d'être de dimension finie :

$$\int_{\Omega} \partial_t u_n(t, x) \varphi(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u_n(t, x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(t, x) \varphi(x) dx, \text{ pour tout } \varphi \in V_n \quad (2.2.4)$$

avec u_n dans $\mathcal{C}([0, T], V_n)$ et $u_n(0, \cdot) = v_n$, où (v_n) est une suite telle que $v_n \in V_n$ et $v_n \rightarrow v$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. En réalité, comme l'espace V_n est de dimension finie, u_n est une solution du problème approché si et seulement si (2.2.4) est vérifiée pour $\varphi = e_0, e_1, \dots, e_n$. En décomposant $u_n(t, \cdot)$ sur la base $(e_0, e_1, \dots, e_n)$,

$$u_n(t, \cdot) = \sum_{k=0}^n c_k^n(t) e_k,$$

on obtient le système de n équations différentielles linéaires à n inconnues suivant :

$$\sum_{k=1}^n \partial_t c_k^n(t) \int_{\Omega} e_l(x) e_k(x) dx + \sum_{k=1}^n c_k^n(t) \int_{\Omega} \nabla e_l(x) \cdot \nabla e_k(x) dx = \int_{\Omega} f(t, x) e_l(x) dx, \text{ pour } l = 1, \dots, n,$$

dont les conditions initiales sont données par la décomposition de v_n sur la base $(e_0, \dots, e_n)$. Ce système prend la forme

$$M \partial_t \mathbf{c}_n(t) + A \mathbf{c}_n(t) = \mathbf{f}(t). \quad (2.2.5)$$

On constate que la matrice M est définie positive, en effet, pour λ dans $\mathbb{R}^n$

$$\lambda^T M \lambda = \sum_{0 \leq i, j \leq n} \lambda_i \lambda_j \int_{\Omega} e_i(x) e_j(x) dx = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i e_i(x) \right)^2 dx,$$

qui est positif, et nul si et seulement si $\sum_{i=0}^n \lambda_i e_i = 0$, c'est à dire si $\lambda = 0$.

Par conséquent, on peut récrire le système (2.2.5) sous la forme

$$\partial_t \mathbf{c}_n(t) = -M^{-1} A \mathbf{c}_n(t) + M^{-1} \mathbf{f}(t),$$

qui admet une unique solution par le théorème de Cauchy-Lipshitz.

Il reste maintenant à montrer que la suite (u_n) a une limite quand n tend vers l'infini, et que cette limite est solution du problème initial. De la même manière que l'on a prouvé l'estimation a priori, on montre

$$\|u_n(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u_n(s, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds \leq \|v_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \|f(s, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds.$$

La suite u_n est donc bornée dans les espaces $\mathbb{L}^\infty([0, T], \mathbb{L}^2(\Omega))$ et $\mathbb{L}^2([0, T], \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. On peut donc en extraire une sous-suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle qu'on ait les convergences

$$\int_{\Omega} \partial_t u_n(t, x) \varphi(x) dx \xrightarrow{n} \int_{\Omega} \partial_t u(t, x) \varphi(x) dx \text{ et } \int_{\Omega} \nabla u_n(t, x) \cdot \nabla \varphi(x) dx \xrightarrow{n} \int_{\Omega} \nabla u(t, x) \cdot \nabla \varphi(x) dx \quad (2.2.6)$$

quelle que soit la fonction φ de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, pour un certain u de $\mathbb{L}^2([0, T], \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ dont la dérivée temporelle $\partial_t u$ soit dans $\mathbb{L}^2([0, T], \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Le raisonnement est basé sur le théorème de Banach-Alaoglu, selon lequel d'une suite bornée φ_n dans un espace dual E' on peut extraire une sous-suite (φ_{n_k}) telle que, pour un certain φ , la suite de réels $\varphi_{n_k}(x)$ converge vers $\varphi(x)$ pour tout x de E (on dit que φ_n converge faiblement vers φ). Ici, les espaces considérés peuvent être vus comme des duals :

$$\mathbb{L}^\infty([0, T], \mathbb{L}^2(\Omega)) = (\mathbb{L}^1([0, T], \mathbb{L}^2(\Omega)))' \text{ et } \mathbb{L}^2([0, T], \mathbb{H}_0^1(\Omega)) = (\mathbb{L}^2([0, T], \mathbb{H}^{-1}(\Omega)))'.$$

la convergence souhaitée (2.2.6) n'est pas exactement celle obtenue à partir du théorème de Banach-Alaoglu. En passant à la limite dans la formulation variationnelle, on voit que la limite est également solution du problème initial.

Il reste enfin à montrer l'existence dans le cas général $v \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ et $f \in \mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Pour cela, on considère une suite (v_n) de fonctions de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ convergeant dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ vers v , et une suite (f_n) d'éléments de $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{L}^2(\Omega))$ convergeant vers f dans $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Le problème associé à v_n et f_n a une unique solution u_n . □

Le point à retenir de cette démonstration est que, l'équation étant *linéaire*, il suffit de montrer que les solutions approchées restent bornées (dans un bon espace de fonctions) pour pouvoir en extraire une sous-suite (faiblement) convergente, par le théorème de Banach-Alaoglu. C'est là tout l'intérêt d'avoir une formulation *faible* au problème, puisqu'on peut ensuite passer à la limite dans la formulation faible.

L'estimation du théorème 2.2.3 permet de montrer que l'équation de la chaleur est dissipative, autrement dit, si $f \equiv 0$ (absence de source de chaleur), alors la température décroît. Plus précisément :

Corollaire 2.2.4. *Soit u une solution de (2.2.1) avec $f = 0$, et $t_1 \geq 0$ tel que $u(t_1, \cdot)$ ne soit pas uniformément nulle. Alors $\|u(t_2, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} < \|u(t_1, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ pour tout $0 < t_1 < t_2$.*

Démonstration. $\|u(t_2, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \leq \|u(t_1, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 - \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u(s, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 ds$. On a donc l'inégalité large. De plus, si on suppose $\|u(t_1, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \|u(t_2, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$, on a

$$\|\nabla u(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 = 0$$

pour $t_1 < t < t_2$. La fonction $u(t, \cdot)$ est donc constante pour tout $t_1 < t < t_2$, et est donc nulle puisque elle est dans $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Ceci contredit $u(t_1, x) \neq 0$. □

2.3 Le principe du maximum

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré que les solutions variationnelles de l'équation de la chaleur présente naturellement des stabilités au sens des normes Hilbertiennes $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}$, et $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)}$.

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que l'équation de la chaleur a également de bonnes propriétés vis à vis de la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}$, définie par

$$\|u\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} = \sup_{\Omega} |f(x)|.$$

Propriété 2.3.1 (Positivité). *Soit v une fonction de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et f une fonction de $\mathbb{L}^2(]0, T[, \mathbb{L}^2(\Omega))$ qui soient strictement positives respectivement sur Ω et $]0, T[\times \Omega$. Alors, la solution variationnelle u de (2.2.1) est positive presque partout dans $\Omega \times [0, T]$.*

Démonstration. On note $u^-(t, x) = \min(0, u(t, x))$ la partie négative de u et $Q = \text{supp } u^-$ le support de u^- qui est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel $u^- = 0$ presque partout. Notre but est donc de démontrer que u^- est nul.

Tout d'abord, comme u est dans l'espace $\mathbb{L}^2([0, T], \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ par la définition 2.2.1, on peut voir que $u^-(t, \cdot)$ est dans $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ pour presque tout $t > 0$ (voir feuille d'exercice) et le gradient de u^- est donné par

$$\nabla u^- = \mathbf{1}_Q \nabla u,$$

qui est bien dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. De même, on a

$$\partial_t u^- = \mathbf{1}_Q \partial_t u.$$

Pour tout v de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, on a pour presque tout t

$$\int_{\Omega} \partial_t u(t, x) v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(t, x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(t, x) v(x) dx.$$

En prenant successivement $v = u^-(t, \cdot)$ pour $t > 0$, on obtient pour presque tout $t > 0$

$$\int_{\Omega} \partial_t u(t, x) u^-(t, x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(t, x) \cdot \nabla u^-(t, x) dx = \int_{\Omega} f(t, x) u^-(t, x) dx,$$

ce qui se récrit

$$\frac{1}{2} \partial_t \int_{\Omega} |u^-(t, x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u^-(t, x)|^2 dx = \int_{\Omega} f(t, x) u^-(t, x) dx.$$

On en déduit

$$\frac{1}{2} \partial_t \int_{\Omega} |u^-(t, x)|^2 dx = - \int_{\Omega} |\nabla u^-(t, x)|^2 dx + \int_{\Omega} f(t, x) u^-(t, x) dx \leq 0$$

En intégrant en temps, on obtient

$$\int_{\Omega} |u^-(t, x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |v^-(t, x)|^2 dx = 0$$

car $v \geq 0$. Donc $u^-(t, x) = 0$. □

Théorème 2.3.2 (Principe du maximum). *Dans le problème (2.2.1), on considère un second membre f nul. Alors la solution variationnelle vérifie*

$$\min(0, \inf_{x \in \Omega} v(x)) \leq u(t, x) \leq \max(0, \sup_{x \in \Omega} v(x))$$

presque partout dans $\Omega \times [0, T]$.

Démonstration. On pose $K = \max(0, \sup_{x \in \Omega} v(x))$ et $w = K - u$. La fonction w est alors dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ mais pas dans $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. En revanche, la fonction $w^-(t, x) = \min(0, w(t, x))$ est bien dans $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, car $u|_{\partial\Omega} = 0$ et la constante K est positive, on a donc $w|_{\partial\Omega} = (K - u)|_{\partial\Omega} = K \geq 0$. Notre but est de montrer que la fonction w est positive, c'est à dire, que $w^- = 0$.

On peut appliquer la formulation variationnelle avec la fonction $w^-(t, \cdot)$, et on obtient, pour presque tout $t > 0$, (on a $\nabla w = -\nabla u$ et $\partial_t w = -\partial_t u$)

$$\int_{\Omega} \partial_t w(t, x) w^-(t, x) dx + \int_{\Omega} \nabla w(t, x) \cdot \nabla w^-(t, x) dx = 0,$$

ce qui se récrit

$$\frac{1}{2} \partial_t \left(\int_{\Omega} |w^-|^2(t, x) dx \right) = - \int_{\Omega} |\nabla w^-(t, x)|^2 dx \leq 0.$$

En intégrant, on obtient

$$\int_{\Omega} |w^-(t, x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |w^-(0, x)|^2 dx = 0,$$

par construction. On a donc $w^- = 0$. C'est à dire $u(t, x) \leq \max(0, \sup_{x \in \Omega} v(x))$. Par un raisonnement symétrique, on prouve l'autre inégalité. $\square$

Ce résultat donne la stabilité pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}$ de l'équation de la chaleur.

Corollaire 2.3.3. *Si v est dans $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$, alors $u \in \mathbb{L}^\infty(]0, T[\times \Omega)$ et*

$$\|u(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \leq \|v\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}, \quad \forall t \geq 0.$$

2.4 Approximation numérique

Dans cette partie, on présente des schémas de discrétisation pour l'équation de la chaleur.

2.4.1 Méthode des différences finies

On considère le problème

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \partial_x^2 u(t, x) = 0 & \text{pour } (t, x) \in [0, \infty[\times \mathbb{R} \\ u(0, x) = v(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

On suppose que la condition initiale v est *continue* et *bornée*.

On discrétise $[0, \infty[\times \mathbb{R}$ en une grille $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ de pas k en temps et h en espace. On note $x_j = jh$ et $t^n = nk$ pour j dans $\mathbb{Z}$ et n dans $\mathbb{N}$. Les méthodes de différences finies consistent à calculer une approximation u_j^n de $u(t^n, x_j)$ en remplaçant les dérivées partielles par des taux d'accroissements. On utilise notamment les *différences progressives* (en anglais, *forward*)

$$\delta_x u_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h},$$

et les *différences rétrogrades* (en anglais, *backward*)

$$\bar{\delta}_x u_j^n = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h}.$$

De même, on va discrétiser le temps à l'aide des opérateurs

$$\delta_t u_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} \quad \text{et} \quad \bar{\delta}_t u_j^n = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{k}.$$

La dissymétrie entre les deux directions du temps fera que les schémas définis à l'aide d'une discrétisation progressive en temps auront des propriétés différentes de ceux définis par une discrétisation rétrograde. En revanche, il n'y a pas de direction privilégiée en espace, de sorte que l'on préférera utiliser un schéma symétrique en espace.

Schéma d'Euler explicite

La *méthode d'Euler explicite* (ou progressive) consiste à approcher la solution de l'équation de la chaleur par le schéma

$$\begin{cases} \delta_t u_j^n &= \delta_x \bar{\delta}_x u_j^n, \text{ pour } (j, n) \text{ dans } \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \\ u_j^0 &= v(x_j), \text{ pour } j \text{ dans } \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

L'utilisation de la discrétisation $\delta_x \bar{\delta}_x$ est justifiée par le fait que le Laplacien est invariant par retournement de l'espace ; il est donc naturel de l'approcher par un opérateur symétrique en espace, ce qui est bien le cas de l'opérateur $\delta_x \bar{\delta}_x$. On remarque notamment que $\delta_x \bar{\delta}_x = \bar{\delta}_x \delta_x$. Le schéma (2.4.2) se réécrit

$$\frac{1}{k}(u_j^{n+1} - u_j^n) = \frac{1}{h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

On note $\lambda = k/h^2$; on obtient alors

$$u_j^{n+1} = \lambda u_{j+1}^n + (1 - 2\lambda)u_j^n + \lambda u_{j-1}^n \stackrel{def}{=} (E_\lambda(u^n))_j.$$

La suite u^{n+1} est obtenue en appliquant un opérateur E_λ linéaire à la suite u^n . C'est la signification du terme *explicite* : on sait calculer pas à pas la solution approchée u_j^n , sans faire d'approximation supplémentaire. De même, on obtient la suite u^n en itérant n fois l'opérateur E_λ à partir de la suite u^0 . On a donc $u^n = E_\lambda^n u^0$. On peut contrôler l'opérateur E_λ . En effet, si on suppose $\lambda \leq 1/2$, pour une suite bornée w on obtient

$$\begin{aligned} |(E_\lambda w)_j| &\leq \lambda |w_{j+1}| + (1 - 2\lambda)|w_j| + \lambda |w_{j-1}| \\ &\leq (\lambda + 1 - 2\lambda + \lambda) \sup_l |w_l| \\ &\leq \sup_l |w_l|. \end{aligned}$$

On a donc l'inégalité

$$\|E_\lambda w\|_{l^\infty} \leq \|w\|_{l^\infty},$$

en notant $\|w\|_{l^\infty} = \sup_j |w_j|$, pour une suite bornée (w_j) . L'opérateur E_λ envoie donc continument l'espace des suites bornées muni de la norme $\|\cdot\|_{l^\infty}$ dans lui-même.

La solution du schéma d'Euler vérifie donc

$$\|u^n\|_{l^\infty} \leq \|u^0\|_{l^\infty}.$$

On dit que le schéma numérique est *stable*. On retrouve l'analogie de la stabilité dans $\mathbb{L}^\infty$ de la solution du problème continu (le principe du maximum).

Si en revanche on suppose $\lambda > 1/2$, le schéma n'est plus stable comme le montre l'exemple suivant. Choisissons $u_j^0 = (-1)^j$. Après une itération, on trouve

$$\begin{aligned} u_j^1 &= \lambda(-1)^{j+1} + (1 - 2\lambda)(-1)^j + \lambda(-1)^{j-1} \\ &= (-\lambda + 1 - 2\lambda - \lambda)(-1)^j \\ &= (1 - 4\lambda)(-1)^j. \end{aligned}$$

La suite u^0 est donc un vecteur propre de l'opérateur E_λ associé à la valeur propre $1 - 4\lambda$, et on a $u_j^n = (1 - 4\lambda)^n (-1)^j$. Comme $1 - 4\lambda < -1$ la suite $\|u^n\|_{l^\infty}$ tend vers ∞ . Le schéma est dit *instable*.

Nous allons maintenant étudier la convergence du schéma (2.4.2) vers la solution de l'équation de la chaleur. On suppose que la vraie solution u est suffisamment régulière (de classe C^4 par exemple). On va faire un développement de Taylor de la solution pour contrôler l'erreur de discrétisation, c'est-à-dire la quantité

$$\varepsilon_j^n = \delta_t u(t^n, x_j) - \delta_x \bar{\delta}_x u(t^n, x_j).$$

On a, puisque u vérifie l'équation de la chaleur,

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^n &= \delta_t u(t^n, x_j) - \delta_x \bar{\delta}_x u(t^n, x_j) \\ &= (\delta_t u(t^n, x_j) - \partial_t u(t^n, x_j)) - (\delta_x \bar{\delta}_x u(t^n, x_j) - \partial_x^2 u(t^n, x_j)). \end{aligned}$$

En faisant des développements de Taylor, on obtient

$$\delta_t u(t^n, x_j) = \frac{1}{k} (u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j)) = \partial_t u(t^n, x_j) + \frac{k}{2} \partial_t^2 u(\tilde{t}^n, x_j),$$

pour un certain $\tilde{t}^n$ dans $[t^n, t^{n+1}]$ et

$$u(t^n, x_{j+1}) = u(t^n, x_j) + h \partial_x u(t^n, x_j) + \frac{h^2}{2} \partial_x^2 u(t^n, x_j) + \frac{h^3}{6} \partial_x^3 u(t^n, x_j) + \frac{h^4}{24} \partial_x^4 u(t^n, \tilde{x}_j)$$

et

$$u(t^n, x_{j-1}) = u(t^n, x_j) - h \partial_x u(t^n, x_j) + \frac{h^2}{2} \partial_x^2 u(t^n, x_j) - \frac{h^3}{6} \partial_x^3 u(t^n, x_j) + \frac{h^4}{24} \partial_x^4 u(t^n, \bar{x}_j)$$

pour un certain $\tilde{x}_j$ de $[x_j, x_{j+1}]$ et un certain $\bar{x}_j$ de $[x_{j-1}, x_j]$ de sorte que

$$\begin{aligned} \delta_x \bar{\delta}_x u(t^n, x_j) &= \frac{1}{h^2} (u(t^n, x_{j+1}) - 2u(t^n, x_j) + u(t^n, x_{j-1})) \\ &= \partial_x^2 u(t^n, x_j) + \frac{h^2}{24} (\partial_x^4 u(t^n, \tilde{x}_j) + \partial_x^4 u(t^n, \bar{x}_j)). \end{aligned}$$

Obtient donc l'expression

$$\varepsilon_j^n = \frac{k}{2} \partial_t^2 u(\tilde{t}^n, x_j) + \frac{h^2}{24} (\partial_x^4 u(t^n, \tilde{x}_j) + \partial_x^4 u(t^n, \bar{x}_j)).$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^n\|_{l^\infty} &\leq \frac{k}{2} \sup_{[t^n, t^{n+1}]} |\partial_t^2 u(\cdot, x_j)| + \frac{h^2}{12} \sup_{[x_{j-1}, x_{j+1}]} |\partial_x^4 u(t^n, \cdot)| \\ &\leq C_\lambda h^2 \sup_{t \in [t^n, t^{n+1}]} \|\partial_x^4 u(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que u est solution de l'équation de la chaleur.

On peut maintenant prouver le théorème suivant :

Théorème 2.4.1. *Soit u une solution de l'équation de la chaleur (2.4.1) et soit u^n la solution approchée obtenue par le schéma (2.4.2). Supposons que le rapport $\lambda = k/h^2$ vérifie la condition de stabilité $\lambda \leq 1/2$. Si la condition initiale v est de classe C^4 sur $\mathbb{R}$, et que v et ses dérivées sont bornées, alors, il existe une constante C telle que*

$$\|u^n - \bar{u}^n\|_{l^\infty} \leq Ct^n h^2 \|v^{(4)}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})},$$

où $\bar{u}_j^n = u(t^n, x_j)$ est la solution exacte à l'instant t^n .

On a donc une erreur d'ordre 2 en espace.

Démonstration. On a

$$\delta_t(\bar{u}_j^n - u_j^n) - \delta_x \bar{\delta}_x(\bar{u}_j^n - u_j^n) = \delta_t \bar{u}_j^n - \delta_x \bar{\delta}_x \bar{u}_j^n = \varepsilon_j^n.$$

En conséquence

$$\begin{aligned} \bar{u}_j^{n+1} - u_j^{n+1} &= \bar{u}_j^n - u_j^n + k\delta_t(\bar{u}_j^n - u_j^n) \\ &= \bar{u}_j^n - u_j^n + k\delta_t(\bar{u}_j^n - u_j^n) - k\delta_x \bar{\delta}_x(\bar{u}_j^n - u_j^n) + k\delta_x \bar{\delta}_x(\bar{u}_j^n - u_j^n) \\ &= E_\lambda(\bar{u}^n - u^n)_j + k\varepsilon_j^n. \end{aligned}$$

Par récurrence, on a donc

$$\bar{u}_j^n - u_j^n = E_\lambda(\bar{u}^0 - u^0)_j + k \sum_{q=1}^n E_\lambda^q(\varepsilon_j^{n-q}) = k \sum_{q=1}^n E_\lambda^q(\varepsilon_j^{n-q}).$$

Sous la condition de stabilité $\lambda \leq \frac{1}{2}$, on a montré que l'opérateur E_λ vérifiait, pour une suite bornée (v_j) , l'inégalité $\|E_\lambda v\|_{l^\infty} \leq \|v\|_{l^\infty}$. On en conclut

$$\|\bar{u}^n - u^n\|_{l^\infty} \leq k \sum_{q=1}^n \|\varepsilon^{n-q}\|_{l^\infty} \leq C_\lambda n k h^2 \sup_{(t,x) \in [0, t^{n+1}] \times \mathbb{R}} |\partial_x^4 u(t, x)| \leq C_\lambda t^n h^2 \|v^{(4)}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})},$$

puisque $\partial_x^4 u$ vérifie l'équation de la chaleur, et donc le principe du maximum. $\square$

Une suite $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ peut se voir, au moins formellement, comme la suite des coefficients de Fourier de la fonction

$$\hat{w}(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} w_j e^{ij\xi}.$$

Comment un schéma de la forme $u^{n+1} = E u^n = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p u_{j+p}^n$ se comporte-t-il vis à vis de cette transformation ? On a

$$\begin{aligned} \widehat{Ew}(\xi) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} (Ew)_j e^{ij\xi} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p w_{j+p} \right) e^{ij\xi} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p w_j e^{i(j-p)\xi} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} w_j e^{ij\xi} \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p e^{-ip\xi} \\ &= \hat{w}(\xi) \hat{E}(\xi), \end{aligned}$$

où l'on note par $\hat{E}$ la fonction suivante, appelée *coefficient d'amplification*, ou *symbole* du schéma :

$$\hat{E}(\xi) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p e^{-ip\xi}.$$

Par conséquent, la transformation $w \mapsto Ew$ se comporte sur la fonction $\hat{w}$ comme une simple multiplication par une fonction $\hat{E}$. Dans le cas du schéma d'Euler explicite, on a

$$\hat{E}_\lambda(\xi) = \lambda e^{i\xi} + (1 - 2\lambda) + \lambda e^{-i\xi} = 1 - 2\lambda(1 - \cos(\xi)).$$

La forme simple que prend l'opérateur E sur la transformée de Fourier permet d'étudier sa stabilité, par le lemme suivant.

Propriété 2.4.2. *Si le schéma associé à E stable (au sens où $\|Ew\|_{l^\infty} \leq \|w\|_{l^\infty}$, pour une suite bornée w), alors son coefficient d'amplification vérifie $|\hat{E}(\xi)| \leq 1$, pour tout réel ξ .*

Démonstration. Supposons qu'il existe un ξ_0 tel que $|\hat{E}(\xi_0)| > 1$. Alors, en appliquant E à la suite $(v_j) = (e^{ij\xi_0})$, on trouve

$$|(Ev)_j| = \left| \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p e^{i(j-p)\xi_0} \right| = |e^{ij\xi_0}| |\hat{E}(\xi_0)| > 1.$$

Le schéma n'est donc pas stable. □

On retrouve bien que le schéma d'Euler explicite (2.4.2) est stable si et seulement si $\lambda \leq 1/2$, puisque $\max_{\xi \in \mathbb{R}} 1 - 2\lambda(1 - \cos(\xi)) = 1$ et $\min_{\xi \in \mathbb{R}} 1 - 2\lambda(1 - \cos(\xi)) = 1 - 4\lambda$. Or $1 - 4\lambda$ est supérieur à -1 si et seulement si $\lambda \leq 1/2$.

Stabilité l^2

On considère la norme discrète $\|w\|_{l^2}^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |w_j|^2$. On notera l^2 l'ensemble des suites (w_j) indexées par $\mathbb{Z}$ telles que $\|w\|_{l^2}$ soit fini.

Théorème 2.4.3. *L'opérateur E vérifie la condition (dite de stabilité l^2)*

$$\|Ew\|_{l^2} \leq \|w\|_{l^2}$$

si et seulement si $|\hat{E}(\xi)| \leq 1$ pour presque tout ξ .

Corollaire 2.4.4. *La condition $\lambda \leq 1/2$ est nécessaire et suffisante pour avoir la stabilité du schéma d'Euler explicite dans l^2 .*

Démonstration. Si la suite w est dans l^2 , la fonction $\hat{w}$ est dans $\mathbb{L}^2((0, 2\pi))$, et on a l'égalité des normes (dite *égalité de Parseval*)

$$\|w\|_{l^2}^2 = \|\hat{w}\|_{\mathbb{L}^2((0, 2\pi))}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\hat{w}(\xi)|^2 d\xi.$$

En conséquence, on a

$$\|Ew\|_{l^2}^2 = \|\hat{E}\hat{w}\|_{\mathbb{L}^2}^2.$$

Si $|\hat{E}(\xi)| \leq 1$ pour tout ξ , on a donc

$$\|E_\lambda w\|_{l^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\hat{E}(\xi)|^2 |\hat{w}(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\hat{w}(\xi)|^2 d\xi = \|w\|_{l^2}^2,$$

ce qui entraîne la stabilité du schéma.

Si l'inégalité $|\hat{E}(\xi)| \leq 1$ n'est pas vérifiée presque partout, alors il existe un réel ε tel que $A_\varepsilon = \{\xi, |\hat{E}(\xi)| > 1 + \varepsilon\}$ soit de mesure strictement positive.

On considère alors la fonction $\mathbf{1}_{A_\varepsilon}$, qui est une fonction de $\mathbb{L}^2((0, 2\pi))$, et qui peut donc s'écrire comme $\widehat{w_0}$ pour une certaine suite w_0 de l^2 . On considère alors

$$\begin{aligned} \|E w_0\|_{l^2}^2 &= \|\widehat{E \widehat{w_0}}\|_{\mathbb{L}^2((0, 2\pi))}^2 = \|\widehat{E} \mathbf{1}_{A_\varepsilon}\|_{\mathbb{L}^2((0, 2\pi))}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{A_\varepsilon} |\hat{E}(\xi)|^2 d\xi \\ &\geq \frac{1 + \varepsilon}{2\pi} \int_{A_\varepsilon} d\xi. \\ &= (1 + \varepsilon) \|\mathbf{1}_{A_\varepsilon}\|_{\mathbb{L}^2((0, \pi))}^2 \\ &= (1 + \varepsilon) \|w_0\|_{l^2}^2. \end{aligned}$$

□

Schéma d'Euler implicite

Que se passe-t-il si l'on veut définir le schéma (2.4.2) en utilisant la discrétisation $\bar{\delta}_t$ au lieu de δ_t ?

$$\begin{cases} \bar{\delta}_t u_j^n &= \delta_x \bar{\delta}_x u_j^n, \text{ pour } (j, n) \text{ dans } \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \\ u_j^0 &= v(x_j), \text{ pour } j \text{ dans } \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2.4.3)$$

Se schéma se récrit

$$\frac{1}{k}(u_j^n - u_j^{n-1}) = \frac{1}{h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n),$$

on obtient donc

$$u_j^n = u_j^{n+1} - \frac{k}{h^2}(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = E_{-\lambda} u^{n+1},$$

où $\lambda = \frac{k}{h^2}$, et l'opérateur $E_{-\lambda}$ est défini comme précédemment.

Ici, le problème est que l'on connaît u^n à partir de u^{n+1} , et non l'inverse. Pour pouvoir calculer u^n pour tout $n \geq 0$ à partir de la connaissance de u^0 , on doit être capable d'inverser l'opérateur $E_{-\lambda}$. En passant à la transformée de Fourier, on obtient

$$\widehat{u^n}(\xi) = \widehat{E_{-\lambda}}(\xi) \widehat{u^{n+1}}(\xi).$$

où encore

$$\widehat{u^{n+1}}(\xi) = \left(\widehat{E_{-\lambda}}(\xi) \right)^{-1} \widehat{u^n}(\xi).$$

La fonction $\widehat{E_{-\lambda}}(\xi)$ est donnée par

$$\widehat{E_{-\lambda}}(\xi) = 1 + 2\lambda(1 - \cos(\xi)),$$

par conséquent, la fonction $\left(\widehat{E}_{-\lambda}(\xi)\right)^{-1}$ est majorée par 1. C'est donc une fonction de $\mathbb{L}^2(0, 2\pi)$, qui peut donc s'exprimer sous la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{in\xi}$ pour une certaine suite (a_n) de l^2 . L'opérateur $E : l^2 \rightarrow l^2$ est donc inversible, et son inverse est donné par

$$E_{-\lambda}^{-1} : w \mapsto \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{n+p} w_p \right)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

De plus, la fonction $\left(\widehat{E}_{-\lambda}\right)^{-1}$ prend ses valeurs dans $]0, 1]$, et ce quel que soit λ , de sorte que le schéma est toujours stable.

θ -schémas, schéma de Crank-Nicholson

On a considéré les deux schémas

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{h^2}$$

et

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} = \frac{u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{h^2}.$$

Il est très naturel de prendre un barycentre de ces deux schémas et de considérer le schéma

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} = \theta \frac{u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{h^2} + (1 - \theta) \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{h^2}, \quad (2.4.4)$$

où θ est un réel de $[0, 1]$. On obtient alors

$$E_{-\theta\lambda} u^{n+1} = E_{(1-\theta)\lambda} u^n,$$

où l'opérateur E_λ est défini comme précédemment.

Le coefficient d'amplification de ce schéma est

$$\frac{\widehat{E}_{(1-\theta)\lambda}(\xi)}{\widehat{E}_{-\theta\lambda}(\xi)} = \frac{1 - 2(1-\theta)\lambda(1 - \cos(\xi))}{1 + 2\theta\lambda(1 - \cos(\xi))} = 1 - 2\lambda \frac{1 - \cos(\xi)}{1 + 2\theta\lambda(1 - \cos(\xi))} = 1 - \frac{1}{2\lambda(1 - \cos(\xi)) + \theta}.$$

Cette quantité est minimale pour $1 - \cos(\xi) = 2$, auquel cas, on a

$$\frac{\widehat{E}_{(1-\theta)\lambda}(\xi)}{\widehat{E}_{-\theta\lambda}(\xi)} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{4\lambda} + \theta},$$

et cette quantité est inférieure à -1 si et seulement si

$$\frac{1}{4\lambda} + \theta < \frac{1}{2}, \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{2(1-2\theta)} < \lambda.$$

Finalement, on a prouvé le résultat

Propriété 2.4.5. *Le θ -schéma (2.4.4) est stable si et seulement si $\lambda \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$. Notamment, il est stable sans conditions pour $\theta \geq \frac{1}{2}$.*

2.4.2 Différences finies pour un problème aux limites

On va désormais s'intéresser à l'équation de la chaleur sur l'intervalle borné $[0, 1]$, c'est à dire au problème

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) &= \Delta u(t, x) \\ u(t, 0) &= 0 \\ u(t, 1) &= 0 \\ u(0, x) &= u_0(x). \end{cases} \quad (2.4.5)$$

On va discrétiser l'espace en un nombre fini M de pas, de sorte que le pas de temps est $h = 1/M$, et $x_j = j/M$.

Schéma d'Euler explicite

Le schéma d'Euler explicite s'écrit dans ce cas

$$\begin{cases} \delta_t u_j^n &= \delta_x \bar{\delta}_x u_j^n, \text{ pour } (j, n) \text{ dans } \{1, \dots, M-1\} \times \mathbb{N} \\ u_j^0 &= v(x_j), \text{ pour } j \text{ dans } \{0, \dots, M\} \\ u_0^n &= u_M^n = 0. \end{cases} \quad (2.4.6)$$

Des calculs semblables à ceux faits en 2.4.1 montrent que, de même que précédemment, ce schéma est stable si et seulement si le rapport $\lambda = \frac{k}{h^2}$ est inférieur à $\frac{1}{2}$, et l'erreur est d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

Schéma d'Euler implicite

On s'intéresse maintenant au *schéma d'Euler implicite*, obtenu en remplaçant la dérivée partielle en temps par une différence finie *rétrograde*.

$$\begin{cases} \bar{\delta}_t u_j^{n+1} &= \delta_x \bar{\delta}_x u_j^{n+1}, \text{ pour } (j, n) \text{ dans } \{1, \dots, M-1\} \times \mathbb{N} \\ u_j^0 &= v(x_j), \text{ pour } j \text{ dans } \{0, \dots, M\} \\ u_0^n &= u_M^n = 0. \end{cases} \quad (2.4.7)$$

On peut récrire ce schéma sous la forme

$$(1 + 2\lambda)u_j^{n+1} - \lambda(u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n, \quad j \in \{1, \dots, M-1\},$$

soit encore

$$A_\lambda u^{n+1} = u^n,$$

où la matrice A_λ est donnée par

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 + 2\lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -\lambda & 1 - 2\lambda & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 - 2\lambda \end{pmatrix}. \quad (2.4.8)$$

On doit donc, à chaque pas de temps, inverser un système linéaire pour pouvoir calculer u^{n+1} . On ne peut donc pas donner une expression exacte de la famille u_j^n , mais seulement une valeur numérique approchée, d'où le qualificatif d'*implicite* pour le schéma. On remarque toutefois que le système linéaire à inverser est toujours le même. La méthode à employer est donc de calculer une fois pour toutes l'inverse de la matrice A_λ .

Propriété 2.4.6. *La matrice A_λ est inversible, quelle que soit la valeur de λ .*

Démonstration. En effet, A_λ est à diagonale strictement dominante, c'est à dire qu'elle vérifie l'inégalité

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

De telles matrices sont inversibles, car si $Ax = 0$ pour une matrice à diagonale strictement dominante, si i est tel que $|x_i|$ soit maximal parmi les $|x_j|$, on a

$$\sum_j A_{ij}x_j = 0,$$

d'où

$$|A_{ii}x_i| = \left| - \sum_{j \neq i} A_{ij}x_j \right| \leq \sum_{j \neq i} |A_{ij}| |x_j| \leq |x_i| \sum_{j \neq i} |A_{ij}|.$$

On en déduit $|x_i| \left(|A_{ii}| - \sum_{j \neq i} |A_{ij}| \right) \geq 0$. Comme $|A_{ii}| - \sum_{j \neq i} |A_{ij}| < 0$, on en déduit $x_i = 0$. $\square$

On va s'intéresser à la stabilité du schéma pour la norme définie par $\|w\|_{l^\infty} = \max_{j \in \{0, \dots, M+1\}} |w_j|$. Il existe un indice j_0 tel que

$$\|u^{n+1}\|_{l^\infty} = |u_{j_0}^{n+1}| \leq \frac{1}{1+2\lambda} (|\lambda|(|u_{j_0+1}^{n+1}| + |u_{j_0-1}^{n+1}|) + |u_{j_0}^n|) \leq \frac{1}{1+2\lambda} (2\lambda \|u^{n+1}\|_\infty + \|u^n\|_\infty).$$

On en déduit $\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty$. Le schéma est donc stable dans l^∞ sans conditions sur λ .

Étudions l'erreur de discrétisation. On définit

$$\varepsilon_j^n = \bar{\delta}_t u(t^{n+1}, x_j) - \delta_x \bar{\delta}_x u(t^{n+1}, x_j).$$

Des calculs semblables à ceux effectués dans la partie 2.4.1 montrent que

$$|\varepsilon_j^n| \leq C(k + h^2) \sup_{t \in [t^n, t^{n+1}]} \sup_{x \in [x_{j-1}, x_{j+1}]} |u(t, x)|$$

pour une certaine constante C .

Propriété 2.4.7. *Soit u une solution du problème et u^n la solution du schéma implicite. Alors*

$$\sup_{q=0, \dots, n} \|\bar{u}^q - u^q\|_{l^\infty} \leq C t^n (k + h^2) \|\partial_x^4 u_0\|_{\mathbb{L}^\infty([0,1])}.$$

On a donc un schéma d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace. On n'a cette fois plus de condition sur le rapport $\lambda = \frac{k}{h^2}$ pour avoir stabilité, mais il est toutefois préférable d'avoir k et h^2 de taille comparable pour optimiser en même temps l'erreur et le temps de calcul.

Démonstration. La preuve est essentiellement la même que précédemment.

On a

$$A_\lambda(\bar{u}^{n+1} - u^{n+1}) = (\bar{u}^n - u^n) + k\varepsilon_j^n,$$

de sorte que

$$\bar{u}^n - u^n = (\bar{u}^0 - u^0) + k \sum_{q=0}^{n-1} (A_\lambda^{-1})^{n-q} \varepsilon_j^q.$$

Or on a supposé $\bar{u}^0 = u^0$ et par stabilité du schéma, on a

$$\left| \sum_{q=0}^{n-1} (A_\lambda^{-1})^{n-q} \varepsilon_j^q \right| \leq k \sum_{q=0}^{n-1} |\varepsilon_j^q| \leq Ct^n(k+h^2) \sup_{t \in [0, t^n]} \|\partial_x^4 u(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})}.$$

On conclut par le principe du maximum. $\square$

Schéma de Crank-Nicholson

Ce schéma est en quelque sorte le milieu des deux schéma précédents. Il est défini par

$$\bar{\delta} u_j^{n+1} = \bar{\delta}_x \delta_x \left(\frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} \right). \quad (2.4.9)$$

L'intérêt de ce schéma est que sur un pas de temps, le Laplacien est calculé aussi bien au temps t^n qu'au temps t^{n+1} . Par conséquent, on obtient un expression plus symétrique en temps, ce qui fait que l'ordre du schéma est plus grand en temps.

On peut récrire (2.4.9) comme

$$\left(I - \frac{k}{2} \delta_x \bar{\delta}_x \right) u^{n+1} = \left(I + \frac{k}{2} \delta_x \bar{\delta}_x \right) u^n$$

ou encore

$$A_{\lambda/2} u^{n+1} = A_{-\lambda/2} u^n,$$

où A_λ est encore défini par la formule (2.4.8). Le schéma s'écrit donc $u^{n+1} = A_{\lambda/2}^{-1} A_{-\lambda/2} u^n$.

Étudions la stabilité de ce schéma : On a vu dans la partie 2.4.2 que la matrice A_λ^{-1} vérifiait

$$\| (A_\lambda)^{-1} w \|_{l^\infty} \leq \| w \|_{l^\infty},$$

quel que soit λ . De plus, dans la partie 2.4.1, on a vu que $\| A_{-\lambda} w \|_{l^\infty} \leq \| w \|_{l^\infty}$ dès que λ est inférieur ou égal à $1/2$. Par conséquent, si $\lambda \leq 1$, le schéma de Crank-Nicolson vérifie $\| (A_{\lambda/2})^{-1} A_{-\lambda/2} w \|_{l^\infty} \leq \| w \|_{l^\infty}$.

Intéressons-nous maintenant à l'erreur de discrétisation. On pose

$$\varepsilon_j^n = \delta_t \bar{u}_j^n - \delta_x \bar{\delta}_x \left(\frac{\bar{u}_j^n + \bar{u}_j^{n+1}}{2} \right).$$

Comme u est solution de l'équation de la chaleur, on peut récrire ε_j^n comme

$$\varepsilon_j^n = \left(\delta_t \bar{u}_j^n - \partial_t u(t^{n+1/2}, x_j) \right) - \delta_x \bar{\delta}_x \left(\frac{\bar{u}_j^n + \bar{u}_j^{n+1}}{2} - \bar{u}_j^{n+1/2} \right) - \left(\delta_x \bar{\delta}_x \bar{u}_j^{n+1/2} - \partial_x^2 u(t^{n+1/2}, x_j) \right). \quad (2.4.10)$$

Nous allons utiliser des développements de Taylor pour estimer chacun des trois termes dans le second membre de (2.4.10). Pour le premier terme, on a

$$\begin{aligned}
\delta_t \bar{u}_j^n - \partial_t u(t^{n+1/2}, x_j) &= \frac{1}{k} \left(u \left(t^{n+1/2} + \frac{h}{2}, x_j \right) - u \left(t^{n+1/2} - \frac{h}{2}, x_j \right) \right) - \partial_t u(t^{n+1/2}, x_j) \\
&= \frac{1}{k} \left(u(t^{n+1/2}, x_j) + \frac{k}{2} \partial_t u(t^{n+1/2}, x_j) + \frac{k^2}{8} \partial_t^2 u(t^{n+1/2}, x_j) + \frac{k^3}{48} \partial_t^3 u(\tilde{t}, x_j) \right) \\
&\quad - \frac{1}{k} \left(u(t^{n+1/2}, x_j) - \frac{k}{2} \partial_t u(t^{n+1/2}, x_j) + \frac{k^2}{8} \partial_t^2 u(t^{n+1/2}, x_j) - \frac{k^3}{48} \partial_t^3 u(\bar{t}, x_j) \right) \\
&\quad - \partial_t u(t^{n+1/2}, x_j) \\
&= \frac{k^2}{24} \partial_t^3 u(\hat{t}, x_j),
\end{aligned}$$

où $\hat{t}$, $\bar{t}$ et $\tilde{t}$ appartiennent à $[t^n, t^{n+1}]$.

Pour le second terme de (2.4.10), le développement donne

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{u}_j^n + \bar{u}_j^{n+1}}{2} - \bar{u}_j^{n+1/2} &= \frac{u(t^{n+1/2} + \frac{k}{2}, x_j) + u(t^{n+1/2} - \frac{k}{2}, x_j)}{2} - u(t^{n+1/2}, x_j) \\
&= \frac{1}{2} \left(u(t^{n+1/2}, x_j) + \frac{k}{2} \partial_t u(t^{n+1/2}, x_j) + \frac{k^2}{8} \partial_t^2 u(\hat{t}, x_j) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(u(t^{n+1/2}, x_j) - \frac{k}{2} \partial_t u(t^{n+1/2}, x_j) + \frac{k^2}{8} \partial_t^2 u(\bar{t}, x_j) \right) \\
&\quad - u(t^{n+1/2}, x_j) \\
&= \frac{k^2}{4} \partial_t^2 u(\tilde{t}, x_j),
\end{aligned}$$

où $\hat{t}$, $\bar{t}$ et $\tilde{t}$ sont dans $[t^n, t^{n+1}]$.***** Enfin, pour le troisième terme de (2.4.10),

$$\begin{aligned}
\delta_x \bar{\delta}_x \bar{u}_j^{n+1/2} - \partial_x^2 u(t^{n+1/2}, x_j) &= \frac{1}{h^2} \left(u(t^{n+1/2}, x_j + h) + u(t^{n+1/2}, x_j - h) - 2u(t^{n+1/2}, x_j) \right) - \partial_x^2 u(t^{n+1/2}, x_j) \\
&= \frac{1}{h^2} \left(u(t^{n+1/2}, x_j) + h \partial_x u(t^{n+1/2}, x_j) + \frac{h^2}{2} \partial_x^2 u(t^{n+1/2}, x_j) + \frac{h^3}{6} \partial_x^3 u(t^{n+1/2}, x_j) + \frac{h^4}{24} \partial_x^4 u(t^{n+1/2}, \bar{x}) \right) \\
&\quad + \frac{1}{h^2} \left(u(t^{n+1/2}, x_j) - h \partial_x u(t^{n+1/2}, x_j) + \frac{h^2}{2} \partial_x^2 u(t^{n+1/2}, x_j) \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{h^3}{6} \partial_x^3 u(t^{n+1/2}, x_j) + \frac{h^4}{24} \partial_x^4 u(t^{n+1/2}, \hat{x}) \right) \\
&\quad - \frac{2}{h^2} u(t^{n+1/2}, x_j) - \partial_x^2 u(t^{n+1/2}, x_j) \\
&= \frac{h^2}{12} \partial_x^4 u(t^{n+1/2}, \hat{x}),
\end{aligned}$$

où $\hat{x}$, $\tilde{x}$ et $\bar{x}$ sont dans $[x_j - h, x_j + h]$. On a donc

$$|\varepsilon_j^n| \leq \text{*****} (k^2 + h^2) \max_{t \in \mathbb{I}, x \in \mathbb{X}} |\partial_x^6 u(t, x)|$$

En fait on a le résultat suivant :

Théorème 2.4.8. *Supposons que u_0 soit de classe C^6 et que sa dérivée 6^{ème} soit bornée. Alors, on a, pour une certaine constante C ,*

$$\sup_{q=0,\dots,n} \|u^q - \bar{u}^q\|_{L^\infty} \leq Ct^n (k^2 + h^2) \|\partial_x^6 u_0\|_{L^\infty([0,1])}.$$

En conséquence, ce schéma a un ordre de convergence supérieur en temps, pourvu que la condition initiale soit suffisamment régulière.

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques résultats sur les équations aux dérivées partielles dans le cas plus simple des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodique. Dans toute la suite, on assimilera les fonctions 2π -périodiques aux fonctions définies sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Ce cadre est plus simple pour plusieurs raisons :

- tout d'abord, on est dans un espace de dimension 1, notamment la notion de primitivisation est simple ;
- ensuite l'espace $\mathbb{T}$ est compact. De nombreux résultats vont se généraliser au cas d'un ouvert *borné* de $\mathbb{R}^n$;
- enfin, l'espace $\mathbb{T}$ n'a pas de bord. Quand on voudra généraliser nos résultats à un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, il faudra bien souvent prendre en compte l'ensemble $\partial\Omega$, par exemple en spécifiant la valeur de la fonction sur le bord de l'ensemble.

L'intérêt de se placer dans ce cadre est que l'on peut (sous certaines hypothèses) décomposer ces fonctions en séries de Fourier de la forme $\sum_n c_n e^{inx}$. Le point clé est que les fonctions exponentielles complexes $x \mapsto e^{inx}$ se comportent bien pour la dérivation, notamment vis à vis de l'opérateur Laplacien $\Delta = \partial_x^2$, puisque

$$\Delta e^{inx} = -n^2 e^{inx}.$$

Ainsi la décomposition en série de Fourier peut être vue comme une diagonalisation de l'opérateur Laplacien.

De plus, la plupart des résultats présentés dans cette partie vont se généraliser à des domaines ou des opérateurs plus généraux.

2.5 L'équation de la chaleur

On va s'intéresser aux solutions de l'équation de la chaleur

$$\partial_t u(t, x) = \Delta u(t, x) \tag{2.5.1}$$

qui sont des fonctions 2π -périodiques par rapport à la variable x . Cherchons tout d'abord une solution par séparation des variables, c'est-à-dire une solution de la forme $u(t, x) = f(x)g(t)$, où f sera une fonction 2π -périodique. L'équation (2.5.1) se réécrit $f(x)g'(t) = f''(x)g(t)$. Autrement dit, on trouve

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)} = C$$

pour une certaine constante C . On a donc $g(t) = \lambda e^{Ct}$ et $f(x) = \alpha e^{\lambda x} + \beta e^{-\lambda x}$, où λ est une racine carrée dans $\mathbb{C}$ de C . Comme on veut que les solutions soient 2π -périodiques, λ doit être un multiple entier de i . Finalement, les solutions à variables séparées sont les

$$e^{-n^2 t} (\alpha e^{inx} + \beta e^{-inx}).$$

On a donc toute une famille de solutions de la forme

$$\varphi_n(t, x) = e^{-n^2 t} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.5.2)$$

On remarquera que $\varphi_n(0, x) = e^{inx}$.

Nous allons maintenant chercher à résoudre l'équation (2.5.1) munie d'une condition initiale u_0 que l'on suppose décomposable en série de Fourier :

$$u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

On a vu que la fonction φ_n définie par (2.5.2) était solution de l'équation (2.5.1) munie de la condition initiale e^{inx} . Par linéarité de l'équation (2.5.1), on peut obtenir formellement la solution issue de la condition u_0 par la formule

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-n^2 t} e^{inx}. \quad (2.5.3)$$

On notera que les calculs précédents ne sont pas totalement justifiés. On va désormais s'inspirer des calculs précédents pour faire une analyse plus rigoureuse.

2.6 Séries de Fourier

On rappelle quelques résultats d'analyse de Fourier. Le tore $\mathbb{T}$ est muni de la mesure induite par la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On est donc en présence d'un espace mesuré, sur lequel on peut définir l'espace de Lebesgue $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$.

Définition 2.6.1. *L'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ est l'espace de toutes les fonctions de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{C}$ mesurables et de carré intégrable, quotienté par la relation d'égalité presque partout.*

De manière équivalente, $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ est l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont 2π -périodiques et de carré intégrable sur une période (considérées à égalité presque partout près).

Propriété 2.6.2. *L'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx.$$

La famille de fonctions $(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base Hilbertienne de l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$. Notamment, l'application

$$(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

définit un isomorphisme en l'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{Z})$ des suites de carré intégrable avec $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$.

Cela signifie notamment que l'on a l'égalité de Parseval

$$\int_{\mathbb{T}} |\varphi(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{T}} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi) \overline{c_n(\psi)}. \quad (2.6.1)$$

Le facteur $(2\pi)^{-1}$ devant l'intégrale est simplement une normalisation agréable (par exemple les fonctions e^{inx} sont de norme 1). La proposition 2.6.2 nous permet donc de décomposer n'importe quelle fonction φ de $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ en série de Fourier sous la forme

$$\varphi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \varphi, e^{inx} \rangle_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} e^{inx},$$

où la somme infinie est à comprendre comme une limite au sens de l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$:

$$\lim_{N, M \rightarrow \infty} \left\| \varphi - \sum_{n=-N}^M \langle \varphi, e^{inx} \rangle_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} e^{inx} \right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} = 0.$$

Les $\langle \varphi, e^{inx} \rangle_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$, sont appelés *coefficients de Fourier* de φ et sont notés $c_n(\varphi)$. Ils valent

$$c_n(\varphi) = \langle \varphi, e^{inx} \rangle_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \varphi(x) e^{-inx} dx.$$

2.7 Régularité d'une fonction définie par une série de Fourier

On peut exprimer la régularité de la fonction à partir de ses coefficients de Fourier par la propriété suivante :

Propriété 2.7.1. *Si une fonction φ de $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ est de classe $\mathcal{C}^k$ alors ses coefficients de Fourier vérifient*

$$c_n(\varphi) = \mathcal{O}(n^{-k}).$$

Inversement, si une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie

$$c_n = \mathcal{O}(n^{-k-\varepsilon})$$

pour un certain $\varepsilon > 0$, alors il s'agit de la suite des coefficients de Fourier d'une fonction de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

En conséquence, une fonction φ de $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si ses coefficients de Fourier vérifient

$$\forall k \in \mathbb{N}, c_n(\varphi) = o(n^{-k}).$$

Démonstration. Soit φ une fonction définie sur $\mathbb{T}$ de classe $\mathcal{C}^k$. Les coefficients de Fourier de φ vérifient, par intégration par parties successives, en utilisant la périodicité de φ :

$$\begin{aligned} c_n(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi in} \int_0^{2\pi} \varphi'(x) e^{-inx} dx \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{2\pi (in)^k} \int_0^{2\pi} \varphi^{(k)}(x) e^{-inx} dx. \end{aligned}$$

Comme la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^k$, la fonction $\varphi^{(k)}$ est bornée, et on peut écrire

$$|c_n(\varphi)| \leq \frac{\sup |\varphi^{(k)}|}{2\pi n^k} \int_0^{2\pi} 1 dx = \frac{\sup |\varphi^{(k)}|}{n^k}.$$

Inversement, si la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $c_n = \mathcal{O}(n^{-k-\varepsilon})$, alors chacune des suites $(n^l c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, pour l variant de 0 à $k-1$ constitue le terme général d'une série absolument convergente, et le théorème de dérivabilité sous la somme montre que la fonction φ , donnée comme limite

$$\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, ses dérivées successives étant données par

$$\varphi^{(m)}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (in)^m c_n e^{inx}.$$

□

2.8 Un résultat d'existence

La propriété 2.7.1 nous montre que la solution formelle (2.5.3), ayant des coefficients de Fourier à décroissance rapide (par rapport à n) devrait être une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à x dès que $t > 0$. Nous allons nous servir de cette observation pour donner une version rigoureuse des calculs faits formellement au début de cette partie.

Théorème 2.8.1. *Soit f une fonction $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$. Il existe une unique solution au problème suivant : trouver une fonction u dans l'espace $\mathcal{C}^\infty(]0, \infty[\times \mathbb{T}) \cap \mathcal{C}^0([0, \infty[, \mathbb{L}^2(\mathbb{T}))$ satisfaisant*

$$\partial_t u(t, x) = \Delta u(t, x), \text{ sur }]0, \infty[\times \mathbb{T}$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t, \cdot) = f \text{ dans } \mathbb{L}^2(\mathbb{T}).$$

Ce résultat montre que l'équation de la chaleur est bien posée pour une large classe de conditions initiales, et que l'équation transforme instantanément une fonction admettant très peu de régularité (une fonction de $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$) en une fonction très régulière.

Démonstration. Pour l'existence, il suffit de remarquer que la fonction définie par

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{-n^2 t} e^{inx},$$

est bien solution du problème et vérifie la régularité demandée. Tout d'abord, le facteur $e^{-n^2 t}$ fait que la série, ainsi que toutes ses dérivées en t et en x converge uniformément sur l'ouvert $] \varepsilon, \infty[\times \mathbb{T}$, quel que soit $\varepsilon > 0$. Par conséquent, u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] \varepsilon, \infty[\times \mathbb{T}$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc sur $] \varepsilon, \infty[\times \mathbb{T}$. On voit

que u vérifie le problème en dérivant sous le signe somme. Il ne reste qu'à prouver que $u(t, \cdot)$ converge vers f dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ ce qui se revient à montrer

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 |e^{-n^2 t} - 1|^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0,$$

ce qui est vrai par le théorème de convergence dominée.

Pour l'unicité, donnons nous u et v deux solutions de l'équation vérifiant les hypothèses de régularité de l'énoncé. On remarque que la fonction $u - v$ est solution du problème, avec une condition initiale nulle. De plus la fonction $u(t, \cdot) - v(t, \cdot)$ étant continue, elle est de carré intégrable pour tout $t \in]0, \infty[$. Par le théorème de dérivabilité sous l'intégrale, la quantité

$$\int_{\mathbb{T}} |u(t, x) - v(t, x)|^2 dx$$

est dérivable et on a :

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\mathbb{T}} |u(t, x) - v(t, x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{T}} (u(t, x) - v(t, x)) \partial_t (u(t, x) - v(t, x)) dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} (u(t, x) - v(t, x)) \Delta (u(t, x) - v(t, x)) dx \\ &= - \int_{\mathbb{T}} |\partial_x (u(t, x) - v(t, x))|^2 dx \end{aligned}$$

□

On peut voir que l'unicité a été démontrée en utilisant la quantité

$$\int_{\mathbb{T}} |\partial_x u(t, x)|^2 dx. \quad (2.8.1)$$

Il semblerait donc que l'on puisse obtenir l'unicité de la solution de l'équation (2.5.1) dans un espace un peu plus grand. En effet, pour définir la quantité (2.8.1), on a seulement besoin que la dérivée de $u(t, \cdot)$ soit dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$, notamment, il est inutile que $\partial_x u(t, \cdot)$ soit continue. La définition de l'espace des fonctions "dont la dérivée est dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ " est assez simple dans notre cadre, en utilisant les développements des fonctions en séries de Fourier. En effet, la dérivée d'une fonction φ a pour coefficients de Fourier

$$\begin{aligned} c_n(\varphi') &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \varphi'(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{in}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \varphi(x) e^{-inx} dx \\ &= inc_n(\varphi). \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

On remarque que si la suite $(inc_n(\varphi))_{n \in \mathbb{Z}}$ est de carré intégrable, alors la suite $(c_n(\varphi))_{n \in \mathbb{Z}}$ l'est aussi puisque l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2 \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |nc_n(\varphi)|^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |inc_n(\varphi)|^2 \right)^{1/2}.$$

On *définit* donc l'espace des fonctions “dont la dérivée est dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ ” par

$$\mathbb{H}^1(\mathbb{T}) = \left\{ \varphi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{T}), \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(\varphi)|^2 < \infty \right\}.$$

On peut munir l'espace $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$ de la norme

$$\|\varphi\|_{\mathbb{H}^1(\mathbb{T})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2) |c_n(\varphi)|^2,$$

qui dérive du produit scalaire $\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathbb{H}^1(\mathbb{T})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2) c_n(\varphi) \overline{c_n(\psi)}$.

Propriété 2.8.2. *Muni de $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^1(\mathbb{T})}$, $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert. De plus, l'injection $\mathbb{H}^1(\mathbb{T}) \subset \mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ est continue, et l'image de cette injection est dense dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$.*

Démonstration. L'injection $\mathbb{H}^1(\mathbb{T}) \hookrightarrow \mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ est continue car pour $\varphi \in \mathbb{H}^1(\mathbb{T})$, on a

$$\|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2) |c_n(\varphi)|^2 = \|\varphi\|_{\mathbb{H}^1(\mathbb{T})}.$$

On va montrer que $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert. On considère donc une suite $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$ de Cauchy dans $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$. On a, pour tout n , $|c_n(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{\mathbb{H}^1(\mathbb{T})}$. Par conséquent, pour tout n , la suite $(c_n(\varphi_p))_{p \in \mathbb{N}}$, indexée par p , est de Cauchy (dans $\mathbb{C}$), et converge donc vers une limite c_n . Le lemme de Fatou nous donne alors

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2) |c_n|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lim_p (1 + n^2) |c_n(\varphi_p)|^2 \\ &\leq \liminf_p \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2) |c_n(\varphi_p)|^2 < \infty, \end{aligned}$$

car, la suite $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{N}}$ étant de Cauchy dans $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$, elle est bornée dans $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$. Montrons maintenant que la convergence a lieu dans $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$. Il suffit de remarquer que, toujours par le lemme de Fatou,

$$\begin{aligned} \limsup_p \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2) |c_n(\varphi_p) - c_n|^2 &= \limsup_p \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lim_q (1 + n^2) |c_n(\varphi_p) - c_n(\varphi_q)|^2 \\ &\leq \limsup_p \limsup_q \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2) |c_n(\varphi_p) - c_n(\varphi_q)|^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

la suite étant de Cauchy dans $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$.

Pour montrer que $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$ est dense dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$, il suffit de remarquer que si φ est dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$, alors la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(\varphi) e^{ikx} \tag{2.8.3}$$

est dans $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$ et converge vers φ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$. □

Propriété 2.8.3. *L'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{T}$ est dense dans $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$.*

Démonstration. Pour une fonction φ de $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$, il suffit de considérer la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par (2.8.3). On vérifie que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers φ au sens de l'espace $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$. De plus, les fonctions φ_n étant des polynômes trigonométriques, elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. $\square$

Les fonctions de $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$ ont effectivement une dérivée qui est dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ au sens suivant.

Propriété 2.8.4. *Si φ est dans $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$, on pose $\varphi'(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} inc_n(\varphi)e^{inx}$. La fonction $\varphi \mapsto \varphi'$ est alors une fonction continue de $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ qui coïncide sur $\mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ avec la dérivation usuelle.*

Démonstration. La fonction $\varphi \mapsto \varphi'$ est bien continue de $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ en vertu de l'inégalité

$$\|\varphi'\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(\varphi)|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2) |c_n(\varphi)|^2 = \|\varphi\|_{\mathbb{H}^1(\mathbb{T})}^2.$$

Le fait que φ' corresponde à la dérivée usuelle si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ est clair par l'équation (2.8.2). $\square$

Propriété 2.8.5. *Si φ et ψ sont deux fonctions de $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$, elles vérifient la formule d'intégration par parties suivante :*

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(x)\psi'(x)dx = - \int_{\mathbb{T}} \varphi'(x)\psi(x)dx.$$

Démonstration. On peut procéder de deux manières : une méthode utilisant les coefficients de Fourier et une méthode utilisant la densité des fonctions régulières dans $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$. Nous présentons ici les deux manières.

- En utilisant les coefficients de Fourier, il suffit de remarquer que, puisque $c_n(\varphi') = inc_n(\varphi)$ et $c_n(\psi') = inc_n(\psi)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \varphi(x)\psi'(x)dx &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi)\overline{c_n(\psi')} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi)\overline{inc_n(\psi)} \\ &= - \sum_{n \in \mathbb{Z}} inc_n(\varphi)\overline{c_n(\psi)} \\ &= - \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi')\overline{c_n(\psi)} \\ &= - \int_{\mathbb{T}} \varphi'(x)\psi(x)dx. \end{aligned}$$

- Par densité, on remarque que si φ et ψ sont de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, l'égalité est vraie : il suffit d'écrire

$$0 = \int_{\mathbb{T}} (\varphi\psi)'(x)dx = \int_{\mathbb{T}} \varphi'(x)\psi(x)dx + \int_{\mathbb{T}} \varphi(x)\psi'(x)dx.$$

Si φ et ψ ne sont pas de classe $\mathcal{C}^1$, on considère (d'après la propriété 2.8.3) deux suites $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ qui convergent respectivement vers φ et ψ dans $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$.

On a alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}} \varphi' \psi + \int_{\mathbb{T}} \varphi \psi' \right| &= \left| \int_{\mathbb{T}} \varphi' \psi + \int_{\mathbb{T}} \varphi \psi' - \int_{\mathbb{T}} \varphi'_n \psi_n + \int_{\mathbb{T}} \varphi_n \psi'_n \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{T}} \varphi' \psi - \int_{\mathbb{T}} \varphi'_n \psi_n \right| + \left| \int_{\mathbb{T}} \varphi \psi' - \int_{\mathbb{T}} \varphi_n \psi'_n \right| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

puisque les suites (φ_n) , (φ'_n) , (ψ_n) et (ψ'_n) convergent respectivement vers φ , φ' , ψ et ψ' dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$. $\square$

On va maintenant montrer le résultat suivant, qui précise le théorème 2.8.1, puisqu'il montre que l'équation (2.5.1) admet une unique solution dans un espace de fonctions *plus grand* que ce qui avait été énoncé dans le théorème 2.8.1.

Théorème 2.8.6. *Pour $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{T})$, il existe une unique fonction u telle que pour tout $T > 0$, u soit dans $\mathbb{L}^2((0, T), \mathbb{H}^1(\mathbb{T})) \cap \mathcal{C}^0([0, \infty[, \mathbb{L}^2(\mathbb{T}))$ et vérifie,*

$$\forall \varphi \in \mathbb{H}^1(\mathbb{T}), \quad \int_{\mathbb{T}} u(T, x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{T}} f(x) \varphi(x) dx - \int_0^T \int_{\mathbb{T}} \partial_x u(t, x) \varphi'(x) dx dt. \quad (2.8.4)$$

Cette fonction coïncide avec la solution de (2.5.1) définie par le théorème 2.8.1 (elle est notamment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \infty[\times \mathbb{T}$).

L'espace $\mathbb{L}^2((0, T), \mathbb{H}^1(\mathbb{T}))$ est défini comme l'espace des fonctions f de $[0, T]$ dans $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$ telles que pour tout φ de $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$, la fonction $t \mapsto \langle f(t), \varphi \rangle_{\mathbb{H}^1(\mathbb{T})}$ soit mesurable et telles que

$$\int_0^T \|f(t, \cdot)\|_{\mathbb{H}^1(\mathbb{T})}^2 dt < \infty.$$

Autrement dit, ce sont les fonctions de la forme

$$f(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$$

où les $c_n(t)$ sont dans $\mathbb{L}^2((0, T))$ et vérifient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 \|c_n(t)\|_{\mathbb{L}^2((0, T))}^2 < \infty.$$

Démonstration du théorème 2.8.6. Considérons la solution u de (2.5.1) donnée par le théorème 2.8.1. On va montrer que u vérifie bien le problème de l'énoncé. On a déjà vu que la fonction u était dans l'espace $\mathcal{C}^0([0, \infty[, \mathbb{L}^2(\mathbb{T}))$, et comme elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \infty[\times \mathbb{T}$, elle est dans $\mathbb{L}^2(] \varepsilon, T[, \mathbb{H}^1(\mathbb{T}))$ quel que soit $\varepsilon > 0$. De plus, en multipliant (2.5.1) par u et en intégrant sur $] \varepsilon, T[\times \mathbb{T}$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^T \int_{\mathbb{T}} \partial_t |u(t, x)|^2 dx dt &= \int_{\varepsilon}^T \int_{\mathbb{T}} u(t, x) \partial_s u(t, x) dx dt \\ &= \int_{\varepsilon}^T \int_{\mathbb{T}} u(t, x) \Delta u(t, x) dx dt \\ &= - \int_{\varepsilon}^T \int_{\mathbb{T}} |\partial_x u(t, x)|^2 dx dt, \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^T \int_{\mathbb{T}} |\partial_x u(s, x)|^2 dx ds &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} |u(T, x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} |u(\varepsilon, x)|^2 ds \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} |u(T, x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 ds. \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

En faisant tendre ε vers 0, on voit que $\partial_x u(s, x)$ est de carré intégrable sur $[0, T] \times \mathbb{T}$, ce qui montre que u est dans $\mathbb{L}^2((0, T), \mathbb{H}^1(\mathbb{T}))$.

Montrons maintenant que u vérifie l'équation (2.8.4). On considère donc une fonction φ de $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$. En multipliant l'équation (2.5.1) par φ et en intégrant sur le domaine $\mathbb{T}$, on obtient, pour $t \in]0, T[$,

$$\int_{\mathbb{T}} \partial_t u(t, x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{T}} \varphi(x) \Delta u(t, x) dx.$$

Les fonctions $u(t, \cdot)$ et φ étant toutes les deux dans $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$, on peut appliquer la formule d'intégration par parties pour obtenir :

$$\int_{\mathbb{T}} \partial_t u(t, x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{T}} \varphi'(x) \partial_x u(t, x) dx.$$

En intégrant sur $[\varepsilon, T]$, on obtient

$$\int_{\mathbb{T}} u(T, x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{T}} u(\varepsilon, x) \varphi(x) dx - \int_{\varepsilon}^T \int_{\mathbb{T}} \varphi'(x) \partial_x u(s, x) dx dt.$$

Le fait que u soit dans $\mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{L}^2(\mathbb{T}))$ permet de passer à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans le membre de gauche, et le fait que u soit dans $\mathbb{L}^2([0, T], \mathbb{H}^1(\mathbb{T}))$ permet de passer à la limite dans le membre de droite. On obtient finalement l'équation (2.8.4).

Pour l'unicité, on considère deux fonctions u et v dans l'espace de fonctions considéré et vérifiant la relation (2.8.4). On a alors, pour tout $T > 0$,

$$\forall \varphi \in \mathbb{H}^1(\mathbb{T}), \quad \int_{\mathbb{T}} (u(T, x) - v(T, x)) \varphi(x) dx = - \int_0^T \int_{\mathbb{T}} \partial_x (u(t, x) - v(s, x)) \varphi'(x) dx dt. \quad (2.8.6)$$

On peut décomposer $u - v$ en série de Fourier :

$$u(t, x) - v(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx},$$

et l'équation (2.8.6) se réécrit alors, en prenant successivement pour φ la fonction e^{inx} ,

$$c_n(T) = \int_0^T i n c_n(t) dt.$$

La fonction $t \mapsto c_n(t)$ est continue et s'écrit comme la primitive d'une fonction intégrable ^(note 1), elle est donc dérivable presque partout, et on a

$$c_n'(t) = -n^2 c_n(t), \quad \text{pour presque tout } t, \quad \text{et } c_n(0) = 0. \quad (2.8.7)$$

(note 1). $c_n(t)$ est dans $\mathbb{L}^2((0, T))$ qui est inclus dans $\mathbb{L}^1((0, T))$.

En multipliant (2.8.7) par $c_n(t)$ (ce qui revient à prendre $\varphi(x) = u(t, x) - v(t, x)$ dans (2.8.4)), on trouve alors

$$\left(\frac{1}{2}|c_n(t)|^2\right)' = c_n(t)c_n'(t) = -n^2|c_n(t)|^2,$$

ce qui donne, en intégrant :

$$0 \leq \frac{1}{2}|c_n(T)|^2 = -n^2 \int_0^T |c_n(t)|^2 dt \leq 0$$

On en déduit alors que la fonction $u - v$ est nulle presque partout sur $[0, T] \times \mathbb{T}$, puisque ces coefficients de Fourier sont identiquement nuls. $\square$

L'équation (2.8.5) qui apparaît dans la preuve montre notamment l'*estimation a priori*

$$\int_{\mathbb{T}} |u(T, x)|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{T}} |\partial_x u(t, x)|^2 dx dt = \int_0^T |f(x)|^2 dx \quad (2.8.8)$$

Le terme de gauche de (2.8.8) s'interprète comme l'*énergie* contenue dans la solution. L'équation (2.8.8) traduit donc le fait que, le système étant isolé, l'énergie incluse dans la solution est dès le début présente dans la condition initiale.

L'équation (2.8.4) est appelée formulation *faible* ou *variationnelle* de l'équation (2.5.1).

2.9 Ajout d'un second membre

Que se passe-t-il si l'on veut rajouter un second membre à l'équation (2.5.1)? On considère donc l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = g(t, x) & \text{pour } (t, x) \in]0, \infty[\times \mathbb{T} \\ u(0, x) = f(x) & \text{pour } x \in \mathbb{T}. \end{cases} \quad (2.9.1)$$

On va procéder comme dans le cas sans second membre, et comprendre comment évoluent les coefficients de Fourier d'une solution. On décompose donc la condition initiale f et la condition au bord g en séries de Fourier, et on suppose que la solution u se décompose elle aussi en série de Fourier :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{inx}, \quad g(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n(t) e^{inx} \quad \text{et} \quad u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{int}.$$

L'équation (2.9.1) se réécrit sur les coefficients comme :

$$\begin{cases} c_n'(t) + n^2 c_n(t) & = \beta_n(t) \\ c_n(0) & = \alpha_n. \end{cases}$$

On a donc une équation différentielle ordinaire avec condition initiale dont la solution est donnée par ^(note 2)

$$c_n(t) = e^{-n^2 t} \alpha_n + \int_0^t e^{n^2(s-t)} \beta_n(s) ds.$$

(note 2). Puisque $(e^{n^2 t} c_n(t))' = e^{n^2 t} (c_n'(t) + n^2 c_n(t)) = e^{n^2 t} \beta_n(t)$.

Si on oublie le terme $e^{-n^2 t} \alpha_n$ issu de la condition initiale (note 3), et que l'on suppose que les coefficients β_n de g sont dans $\mathbb{L}^2((0, T))$, on voit que (en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis en intervertissant les deux intégrales)

$$\begin{aligned}
\|c_n\|_{\mathbb{L}^2((0, T))} &= \left(\int_0^T \left| \int_0^t e^{n^2(s-t)} \beta_n(s) ds \right|^2 dt \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_0^T \left(\int_0^t e^{n^2(s-t)} ds \int_0^t e^{n^2(s-t)} |\beta_n(s)|^2 ds \right) dt \right)^{1/2} \\
&= \left(\int_0^T \frac{1}{n^2} \int_0^t e^{n^2(s-t)} |\beta_n(s)|^2 ds dt \right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{1}{n^2} \int_0^T |\beta_n|^2(s) \int_s^T e^{n^2(s-t)} dt ds \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{n^2} \|\beta_n\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R})}.
\end{aligned} \tag{2.9.2}$$

Par conséquent, les coefficients de Fourier du second membre ont été divisés par n^2 dans la solution. D'une certaine manière, au vu de la proposition 2.7.1, cela signifie que la solution u est aussi régulière que la primitive seconde du second membre. En quelque sorte, l'équation a fait gagner deux crans dans la régularité de la fonction. Nous allons maintenant donner un sens précis à cette régularisation de "deux crans".

2.10 Espaces de Sobolev

On a vu dans la partie 2.7 que la décroissance des coefficients de Fourier d'une fonction permet de caractériser sa régularité. Nous allons donc définir des espaces de "fonctions", basés sur l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$, qui seront indexés par un paramètre réel s correspondant au degré de "régularité" des fonctions qu'ils contiennent. Il s'agit des *espace de Sobolev* $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ définis par

$$\mathbb{H}^s(\mathbb{T}) = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{2s} |c_n|^2 < \infty \right\}.$$

On a clairement les inclusions $\mathbb{H}^s(\mathbb{T}) \subset \mathbb{H}^{s'}(\mathbb{T})$ si $s \geq s'$ et $\mathbb{H}^0(\mathbb{T}) = \mathbb{L}^2(\mathbb{T})$.

Si s est positif, l'espace $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ est un sous-espace de $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$, et ses éléments s'identifient donc à des fonctions, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \in \mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ étant convergente dans l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$. En revanche, si $s < 0$, l'expression $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ est à prendre en un sens plus formel, qui peut être rendu rigoureux en travaillant par *dualité*.

En effet, l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ étant un espace de Hilbert, on peut l'identifier à son dual (note 4) par l'ap-

(note 3). Par exemple en considérant une condition initiale nulle.

(note 4). On rappelle que le dual d'un espace vectoriel normé E est l'ensemble des formes linéaires continues sur E , noté E' .

plication suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{L}^2(\mathbb{T}) & \rightarrow (\mathbb{L}^2(\mathbb{T}))' \\ \varphi & \mapsto \left(\psi \mapsto \langle \varphi, \psi \rangle_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi) \overline{c_n(\psi)} \right). \end{cases} \quad (2.10.1)$$

Le théorème suivant montre que l'espace $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$, pour $s < 0$, peut se voir naturellement comme le dual de l'espace $\mathbb{H}^{-s}(\mathbb{T})$, pour la dualité (2.10.1).

Théorème 2.10.1. *L'espace $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$, muni de la norme $\|\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)^{\frac{s}{2}} |c_n|^2$ est un espace de Hilbert.*

Pour tout s réel, l'espace $\mathbb{H}^{-s}(\mathbb{T})$ s'identifie au dual de $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ par

$$\begin{cases} \mathbb{H}^{-s}(\mathbb{T}) & \rightarrow (\mathbb{H}^s(\mathbb{T}))' \\ \varphi & \mapsto \left(\psi \mapsto \int_{\mathbb{T}} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi) \overline{c_n(\psi)} \right). \end{cases}$$

Démonstration. La preuve que $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ est un Hilbert est semblable à la preuve de la proposition 2.8.2.

Pour montrer que $\mathbb{H}^{-s}(\mathbb{T})$ est le dual de $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$, on remarque que pour φ dans $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ et ψ dans $\mathbb{H}^{-s}(\mathbb{T})$, les suites $n^s c_n(\varphi)$ et $n^{-s} c_n(\psi)$ sont dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$. Par conséquent, la somme

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi) c_n(\psi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (n^s c_n(\varphi)) (n^{-s} c_n(\psi))$$

est bien définie, et on a

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi) c_n(\psi) \right| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n^s c_n(\varphi)|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n^{-s} c_n(\psi)|^2 \right)^{1/2} \leq \|\varphi\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{T})} \|\psi\|_{\mathbb{H}^{-s}(\mathbb{T})}.$$

□

Théorème 2.10.2 (Rellich-Kondrachov). *Si $s < s'$, l'injection $\mathbb{H}^{s'}(\mathbb{T}) \subset \mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ est compacte, c'est-à-dire que de toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{H}^{s'}(\mathbb{T})$, on peut extraire une sous-suite qui converge au sens de l'espace $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$.*

Démonstration. On considère une suite bornée (φ_p) d'éléments de $\mathbb{H}^{s'}(\mathbb{T})$. Quitte à multiplier par une constante, on peut supposer que la norme des φ_p est majorée par 1. On a donc

$$|c_n(\varphi_p)| \leq n^{-s'/2} \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{s'} |c_n(\varphi_p)|^2} \leq n^{-s'/2}.$$

Chacune des suites $(c_n(\varphi_p))_{p \in \mathbb{N}}$ est donc bornée, et on peut en extraire des sous-suites convergentes (dans $\mathbb{C}$). Par un procédé d'extraction diagonale, on peut supposer que la même suite extraite convient à tous les indices n et on a donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\varphi_p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} c_n$. Montrons maintenant que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$

est la limite dans $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ de la suite $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{N}}$.

Tout d'abord, le lemme de Fatou montre que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{2s} |c_n|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \liminf_p n^{2s} |c_n(\varphi_p)|^2 \leq \liminf_p \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{2s} |c_n(\varphi_p)|^2 = 1.$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
\limsup_p \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{s'} |c_n(\varphi_p) - c_n|^2 &\leq \limsup_p \sum_{|n| \leq N} n^{s'} |c_n(\varphi_p) - c_n|^2 + \limsup_p \sum_{|n| \geq N} n^{s'} |c_n(\varphi_p) - c_n|^2 \\
&\leq 0 + N^{s'-s} \limsup_p \sum_{|n| \geq N} n^{2s} |c_n(\varphi_p) - c_n|^2 \\
&\leq 2N^{s'-s} \\
&\xrightarrow{N} 0.
\end{aligned}$$

□

Par ailleurs, on a la situation suivante :

Propriété 2.10.3. *Pour tout $s < s'$, l'espace $\mathbb{H}^{s'}(\mathbb{T})$ est dense dans $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}) \subset \mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ pour tout s , il suffit de montrer que l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ est dense dans $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ pour tout s , ce qui se fait comme dans la preuve de la proposition 2.8.3. □

On peut donner un résultat sur la régularité ponctuelle des fonctions de $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$.

Propriété 2.10.4. *Si $s \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, les fonctions de $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ sont $s - \frac{1}{2}$ -Hölderienne. C'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout φ de $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$, on ait*

$$\forall x \in \mathbb{T}, \forall y \in \mathbb{T}, |u(x) - u(y)| \leq C \|\varphi\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{T})} |x - y|^{s - \frac{1}{2}}.$$

Notamment, les fonctions de $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$, $s > \frac{1}{2}$ sont continues.

Si $s \in]k + \frac{1}{2}, k + \frac{3}{2}]$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, alors les fonctions de $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ et leur dérivée $k^{\text{ième}}$ sont dans $\mathbb{H}^{s-k}(\mathbb{T})$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que si $s > \frac{1}{2}$, alors les fonctions de $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ sont continues. On considère donc $s > \frac{1}{2}$. Soit φ une fonction de classe $\tilde{\mathcal{C}}^\infty$ (qui est donc dans $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$). La fonction φ étant régulière, sa série de Fourier converge uniformément, et on peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{T}$

$$|\varphi(x)|^2 = \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi) e^{inx} \right|^2 \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^{2s}} \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{2s} |c_n(\varphi)|^2 \right) \leq C_s \|\varphi\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{T})}^2,$$

où C_s est une constante (finie puisque $s > \frac{1}{2}$) ne dépendant que de s . Par conséquent, cette inégalité étant vraie pour tout x , on a

$$\|\varphi\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})} \leq C_s \|\varphi\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{T})},$$

ce qui montre que la convergence dans $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ implique la convergence uniforme. Si maintenant φ est une fonction quelconque de $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$, il existe une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ convergeant dans $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$, et donc uniformément, vers φ . Une limite uniforme d'une suite de fonctions régulière étant continue, on a montré que φ est continue.

Montrons maintenant la régularité Hölderienne des fonctions de $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$. Soit φ dans $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi) (e^{inx} - e^{iny}) \right| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{2s} |c_n(\varphi)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|e^{inx} - e^{iny}|^2}{n^{2s}} \right)^{1/2}.$$

On va maintenant séparer la deuxième somme en deux suivant la taille de l'entier n considéré. Pour x et y fixés, on note N la partie entière de $\frac{1}{|x-y|}$.

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|e^{inx} - e^{iny}|^2}{n^{2s}} &= \sum_{|n| \leq N} \frac{|e^{inx} - e^{iny}|^2}{n^{2s}} + \sum_{|n| > N} \frac{|e^{inx} - e^{iny}|^2}{n^{2s}} \\ &= \sum_{|n| \leq N} \frac{n^2|x-y|^2}{n^{2s}} + \sum_{|n| > N} \frac{4}{n^{2s}} \\ &\sim C(N^{3-2s}|x-y|^2 + N^{1-2s}) \\ &\sim C|x-y|^{2s-1}. \end{aligned}$$

Dans l'avant-dernière équivalence, on a utilisé les propriétés

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha \sim \frac{k^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=n}^{\infty} k^\beta \sim \frac{k^{\beta+1}}{\beta+1}$$

valables pour $\alpha > -1$ et $\beta < -1$. □

2.11 Formulation variationnelle pour l'équation de la chaleur

En multipliant l'équation (2.9.1) par une fonction test, en intégrant en temps et espace et en intégrant par parties, on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\forall 0 \leq t \leq T, \forall \varphi \in \mathbb{H}^1(\mathbb{T}),$$

$$\int_{\mathbb{T}} u(t, x) \varphi(x) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{T}} \partial_x u(s, x) \varphi'(x) dx ds = \int_{\mathbb{T}} f(x) \varphi(x) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{T}} g(s, x) \varphi(s, x) dx ds. \quad (2.11.1)$$

On a en fait le résultat suivant.

Théorème 2.11.1. *Soit f une fonction de $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ et g une fonction de $\mathbb{L}^2([0, T], \mathbb{H}^{-1}(\mathbb{T}))$ vérifiant*

$$\int_{\mathbb{T}} g(x) dx = 0.$$

Il existe une unique fonction u dans l'espace $\mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{L}^2(\mathbb{T})) \cap \mathbb{L}^2([0, T], \mathbb{H}^1(\mathbb{T}))$ vérifiant la formulation (2.11.1). De plus, si g est dans $\mathbb{L}^2([0, T], \mathbb{H}^s(\mathbb{T}))$ pour un certain $s > -1$, alors u est dans l'espace $\mathbb{L}^2([0, T], \mathbb{H}^{s+2}(\mathbb{T}))$.

Remarquer que les conditions sur la fonction u correspondent à la régularité nécessaire pour donner un sens à la formulation (2.11.1) pour φ dans $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$.

Démonstration. Comme l'équation est linéaire, quitte à "dériver $s-1$ fois", c'est à dire à multiplier les coefficients de Fourier des fonctions en jeu par n^{s-1} , on peut supposer que $s=1$ et $s-2=-1$. Dans ce cas les deux espace $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$ et $\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{T})$ sont en dualité.

Pour montrer l'existence d'une solution à cette équation, on va considérer la solution formelle calculée dans la partie 2.9.

Pour une condition initiale $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{inx}$ et un second membre $g(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n(t) e^{inx}$ on avait trouvé formellement comme solution la fonction

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx},$$

où les c_n sont définis par

$$c_n(t) = e^{-n^2 t} \alpha_n + \int_0^t e^{n^2(s-t)} \beta_n(s) ds.$$

Montrons que cette fonction vérifie bien les hypothèses de l'énoncé. La fonction u peut s'exprimer comme la somme des fonctions u_1 et u_2 définies par

$$u_1(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t} \alpha_n e^{inx} \quad \text{et} \quad u_2(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\int_0^t e^{n^2(s-t)} \beta_n(s) ds \right) e^{inx}.$$

La fonction u_1 correspond à l'équation sans second membre, dont la régularité a été démontrée dans la partie 2.8. Montrons que la fonction u_2 vérifie les conditions de l'énoncé, c'est à dire qu'elle est dans l'espace $C^0([0, T], \mathbb{L}^2(\mathbb{T})) \cap \mathbb{L}^2((0, T), \mathbb{H}^1(\mathbb{T}))$. Pour cela, nous devons d'abord vérifier que ses coefficients de Fourier sont continus. Les coefficients de u_2 sont donnés par

$$\int_0^t e^{n^2(s-t)} \beta_n(s) ds. \tag{2.11.2}$$

Comme $g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n(t) e^{inx}$ est supposée être dans $\mathbb{L}^2((0, T), \mathbb{H}^{-1}(\mathbb{T}))$, les fonctions β_n sont dans l'espace $\mathbb{L}^2((0, T))$ et donc dans $\mathbb{L}^1((0, T))$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Par conséquent la fonction définie par (2.11.2) est continue.

Nous devons de plus montrer que la fonction

$$t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\int_0^t e^{n^2(s-t)} \beta_n(s) ds \right) e^{inx} \tag{2.11.3}$$

(à valeurs dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$) est continue. Par définition, cela signifie que pour $t' \rightarrow t$, on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \int_0^t e^{n^2(s-t)} \beta_n(s) ds - \int_0^{t'} e^{n^2(s-t')} \beta_n(s) ds \right|^2 \rightarrow 0 \text{ * * * * * }.$$

Enfin, on a vu en (2.9.2) que $\|c_n\|_{\mathbb{L}^2((0, T))} \leq \frac{1}{n^2} \|\beta_n\|_{\mathbb{L}^2((0, T))}$. Comme on a $g \in \mathbb{L}^2((0, T), \mathbb{H}^{-1}(\mathbb{T}))$, cela montre que $u \in \mathbb{L}^2((0, T), \mathbb{H}^1(\mathbb{T}))$. $\square$

2.11.1 Estimation d'énergie

Propriété 2.11.2. [Inégalité de Poincaré] Si φ est une fonction de $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$, telle que $\int_{\mathbb{T}} \varphi(x) dx = 0$, alors

$$\|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \|\varphi'\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}.$$

Le résultat est bien entendu faux si on ne suppose pas $\int_{\mathbb{T}} \varphi(x) dx = 0$, comme le montre le contre-exemple $\varphi \equiv 1$, $\varphi' \equiv 0$.

Démonstration. La condition $\int_{\mathbb{T}} \varphi(x)dx = 0$ s'écrit $c_0(\varphi) = 0$. On a donc

$$\|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2 = \sum_{n \neq 0} |c_n(\varphi)|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(\varphi)|^2 = \|\varphi'\|_{\mathbb{H}^1(\mathbb{T})},$$

puisque $1 \leq n^2$ si $n \neq 0$. □

La propriété 2.11.2 implique notamment que sur l'espace $\mathbb{H}_0^1(\mathbb{T}) = \{\varphi \in \mathbb{H}^1(\mathbb{T}), \int_{\mathbb{T}} \varphi(x)dx = 0\}$, les normes $\|\varphi\|_{\mathbb{H}^1(\mathbb{T})}$ et $\|\varphi'\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$ sont équivalentes. En effet, pour $\varphi \in \mathbb{H}_0^1(\mathbb{T})$

$$\|\varphi'\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \underbrace{\|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + \|\varphi'\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}}_{=\|\varphi\|_{\mathbb{H}^1(\mathbb{T})}} \leq 2\|\varphi'\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}.$$

Propriété 2.11.3. *Si u est une solution de l'équation de la chaleur*

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = g(t, x) & \text{sur } (t, x) \in]0, \infty[\times \mathbb{T} \\ u(0, x) = f(x) & \text{pour } x \in \mathbb{T} \end{cases},$$

au sens du théorème 2.11.1, alors on a l'inégalité, dite estimation a priori ^(note 5)

$$\int_{\mathbb{T}} |u(T, x)|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{T}} |\partial_x u(t, x)|^2 dx dt \leq \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx + \int_0^T \|g(t, \cdot)\|_{\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{T})}^2 dt$$

Démonstration. On prend comme fonction test dans la formulation (2.8.4) la fonction $u(t, \cdot)$.

□

2.12 Principe du maximum

On va montrer le théorème suivant.

Théorème 2.12.1. *Soit u la solution de l'équation de la chaleur homogène donnée par le théorème 2.8.6. On suppose de plus que la condition initiale vérifie $f \geq 0$. Alors, pour tout t positif, on a*

$$u(t, x) \geq 0.$$

En appliquant le théorème précédent aux fonctions $\max_{\mathbb{T}} f - f$ et $f - \min_{\mathbb{T}} f$, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.12.2. *Notons u l'unique solution de l'équation de la chaleur homogène donnée par le théorème 2.8.6. Si la condition initiale f est bornée, alors on a pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{T}$,*

$$\min_{\mathbb{T}}(f) \leq u(t, x) \leq \max_{\mathbb{T}}(f).$$

Notamment,

$$\|u(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})},$$

ce qui montre que la fonction qui à une condition initiale f associe la solution de l'équation de la chaleur homogène associée est continue en norme $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})$.

(note 5). Cf équation (2.8.8).

Pour démontrer le théorème 2.12.1, on va avoir besoin du résultat suivant.

Lemme 2.12.3. Soit φ une fonction de $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$. Alors $|\varphi|$ est également une fonction de $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$ et on a

$$|\varphi|' = \varphi' \times \text{signe}(\varphi).$$

Démonstration. On considère la fonction $h_\varepsilon = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2}$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et dont la dérivée est

$$h'_\varepsilon(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}}.$$

La famille de fonctions $(h_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge uniformément vers la fonction valeur absolue quand ε tend vers 0 :

$$0 \leq h_\varepsilon(x) - |x| \leq \varepsilon.$$

De plus, h'_ε est bornée par 1 (uniformément en ε), est Lipschitzienne et converge simplement vers la fonction signe (note 6).

Par conséquent, si φ est une fonction de $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$, alors $h_\varepsilon \circ \varphi$ est également (note 7) dans $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$ et vérifie

$$(h_\varepsilon \circ \varphi)' = \varphi' \times h'_\varepsilon(\varphi).$$

Cependant, la fonction $h_\varepsilon \circ \varphi$ converge dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ vers $|\varphi|$, puisque

$$\| |\varphi| - h_\varepsilon \circ \varphi \|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}^2 = \int_{\mathbb{T}} \left| |\varphi(x)| - h_\varepsilon(\varphi(x)) \right|^2 dx \leq \varepsilon^2,$$

et la fonction $(h_\varepsilon \circ \varphi)'$ converge dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ vers $\varphi' \times \text{signe}(\varphi)$, puisque le théorème de convergence dominée montre

$$\| (h_\varepsilon \circ \varphi)' - \varphi' \times \text{signe}(\varphi) \|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}^2 = \int_{\mathbb{T}} \left| \varphi'(x) \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\varphi(x)^2 + \varepsilon^2}} - \varphi'(x) \text{signe}(\varphi(x)) \right|^2 dx \rightarrow 0.$$

□

Preuve du théorème 2.12.1. On applique la formulation variationnelle (2.8.4) en prenant comme fonction test la fonction $u^- = \frac{u-|u|}{2}$, qui est bien dans $\mathbb{H}^1(\mathbb{T})$.

On obtient alors

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \mathbf{1}_{u < 0} \partial_t |u|^2(x) dx + \int_{\mathbb{T}} \mathbf{1}_{u < 0} |\partial_x u(t, x)|^2 dx = 0$$

ce qui donne, en intégrant de 0 à T , puisque $f^- \equiv 0$

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} |u^-(t, x)| dx = - \int_0^T \int_{\mathbb{T}} \mathbf{1}_{u < 0} |\partial_x u(t, x)| dx dt \leq 0.$$

Par conséquent, $u^- \equiv 0$, ce qui montre que u est positive. *****

□

(note 6). On l'on pose $\text{signe}(x) = 1$ si $x > 0$, $\text{signe}(x) = -1$ si $x < 0$ et $\text{signe}(x) = 0$ si $x = 0$.

(note 7). La composée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivée Lipschitzienne avec une fonction $\mathbb{H}^1$ est $\mathbb{H}^1$.

Chapitre 3

Équations de transport

On va s'intéresser plus précisément à l'équation suivante, dite *équation de transport* :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \lambda \partial_x u(t, x) = 0 & , t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.0.1)$$

La solution de cette équation est explicite à partir de la condition initiale. En effet, la fonction u définie par l'expression

$$u(t, x) = u_0(x - \lambda t)$$

est clairement solution de l'équation (3.0.1). On comprend sur cette solution la raison de la dénomination "équation de transport" : partant d'une condition initiale donnée, on obtient la solution en des temps positifs en déplaçant la condition initiale avec une vitesse λ .

En particulier, on remarque que l'équation (3.0.1) est stable dans toutes les normes $\mathbb{L}^p(\mathbb{R})$. En effet, si u_0 est dans $\mathbb{L}^p(\mathbb{R})$, on a alors

$$\|u(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R})} = \|u_0(\cdot - \lambda t)\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R})}.$$

Même si la solution de l'équation (3.0.1) est explicite, il peut toutefois être intéressant de comprendre comment se comporte un schéma de discrétisation de cette équation, par exemple pour discrétiser un terme de transport dans une équation admettant d'autres termes.

3.1 Schéma centré et schéma de Lax-Wendroff

3.1.1 Schéma centré

On peut tout d'abord penser au schéma suivant, obtenu par une discrétisation explicite en temps, et une discrétisation centrée en espace.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} + \lambda \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\delta x} = 0. \quad (3.1.1)$$

On obtient alors la relation de récurrence suivante :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\lambda \delta t}{2\delta x} u_{j-1}^n - \frac{\lambda \delta t}{2\delta x} u_{j+1}^n$$

Ce schéma est en fait une très mauvaise façon de faire :

Propriété 3.1.1. *Si $\lambda \neq 0$, le schéma précédent n'est jamais stable dans $\mathbb{L}^\infty$, quelles que soient les valeurs de δt et δx .*

Démonstration. On suppose $\lambda > 0$. Considérons la suite $(u_j^0)_{j \in \mathbb{Z}}$ définie par

$$u_j^0 = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

À la première itération, la suite $(u_j^1)_{j \in \mathbb{Z}}$ est donnée par

$$u_j^1 = \begin{cases} 0 & \text{si } j < 0 \\ -\frac{\lambda \delta t}{\delta x} & \text{si } j = 0, \\ 1 + \frac{\lambda \delta t}{\delta x} & \text{si } j = 1, \\ 1 & \text{si } j > 1. \end{cases}$$

On a donc $\sup_{j \in \mathbb{Z}} |u_j^1| = 1 + \frac{\lambda \delta t}{\delta x} > 1 = \sup_{j \in \mathbb{Z}} |u_j^0|$. Si $\lambda < 0$, on fait le même raisonnement avec la suite valant 1 sur $\mathbb{Z}^-$ et 0 sur $\mathbb{Z}^+$. $\square$

Voyons d'où vient ce phénomène d'instabilité. Pour cela, on va calculer l'erreur de consistance associée au schéma.

Propriété 3.1.2. *On suppose u_0 de classe C^4 . Soit $u(t, x) = u_0(x + \lambda t)$ la solution correspondante. On pose $\bar{u}_j^n = u(n\delta t, j\delta x)$. L'erreur de consistance associée au schéma est donnée par*

$$\varepsilon_j^n \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\delta t} + \lambda \frac{\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_{j-1}^n}{2\delta x} = \frac{\delta t}{2} \partial_t^2 u(n\delta t, j\delta x) + \lambda \frac{\delta x^2}{6} \partial_x^3 u(n\delta t, j\delta x) + \mathcal{O}(\delta t^2 + \delta x^3).$$

Démonstration. On pose $\bar{u}_j^n = u(n\delta t, j\delta x)$. On a alors, par la formule de Taylor, l'égalité

$$\bar{u}_j^{n+1} = u(n\delta t + \delta t, j\delta x) = u(n\delta t, j\delta x) + \delta t \partial_t u(n\delta t, j\delta x) + \frac{\delta t^2}{2} \partial_t^2 u(n\delta t, j\delta x) + \frac{\delta t^3}{6} \partial_t^3 u(\bar{t}, j\delta x),$$

pour une certaine valeur $\bar{t}$, de sorte que

$$\frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\delta t} - \partial_t u(n\delta t, j\delta x) = \frac{\delta t}{2} \partial_t^2 u(n\delta t, j\delta x) + \frac{\delta t^2}{6} \partial_t^3 u(\bar{t}, j\delta x).$$

De même, pour la dérivée spatiale, on a

$$\begin{aligned} \bar{u}_{j+1}^n &= u(n\delta t, j\delta x + \delta x) \\ &= u(n\delta t, j\delta x) + \delta x \partial_x u(n\delta t, j\delta x) + \frac{\delta x^2}{2} \partial_x^2 u(n\delta t, j\delta x) + \frac{\delta x^3}{6} \partial_x^3 u(n\delta t, j\delta x) + \frac{\delta x^4}{24} \partial_x^4 u(n\delta t, \bar{x}), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \bar{u}_{j-1}^n &= u(n\delta t, j\delta x - \delta x) \\ &= u(n\delta t, j\delta x) - \delta x \partial_x u(n\delta t, j\delta x) + \frac{\delta x^2}{2} \partial_x^2 u(n\delta t, j\delta x) - \frac{\delta x^3}{6} \partial_x^3 u(n\delta t, j\delta x) + \frac{\delta x^4}{24} \partial_x^4 u(n\delta t, \tilde{x}), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\delta x} - \partial_x u(n\delta t, j\delta x) = \frac{\delta x^2}{6} \partial_x^2 u(n\delta t, j\delta x) + \frac{\delta x^3}{48} (\partial_x^4 u(n\delta t, \tilde{x}) - \partial_x^4 u(n\delta t, \bar{x})).$$

En regroupant toutes ces estimations, on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^n &= \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\delta t} + \lambda \frac{\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_{j-1}^n}{2\delta x} \\ &= \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\delta t} + \lambda \frac{\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_{j-1}^n}{2\delta x} - \partial_t u(n\delta t, j\delta x) - \lambda \partial_x u(n\delta t, j\delta x) \\ &= \frac{\delta t}{2} \partial_t^2 u(n\delta t, j\delta x) + \lambda \frac{\delta x^3}{6} \partial_x^3 u(n\delta t, j\delta x) + \frac{\delta t^2}{6} \partial_t^3 u(\bar{t}, j\delta x) + \lambda \frac{\delta x^3}{48} (\partial_x^3 u(n\delta t, \bar{x}) - \partial_x^3 u(n\delta t, \tilde{x})). \end{aligned}$$

□

D'après la proposition (3.1.2), le schéma (3.1.1) est également consistant avec l'équation

$$\partial_t u(t, x) + \lambda \partial_x u(t, x) + \frac{\lambda^2 \delta t}{2} \partial_x^2 u(t, x) = 0. \quad (3.1.2)$$

En effet, on a la proposition suivante :

Propriété 3.1.3. Soit u une solution de l'équation (3.1.2). On pose $\bar{u}_j^n = u(n\delta t, j\delta x)$. L'erreur de consistence du schéma (3.1.1) pour l'équation (3.1.2) est

$$\eta_j^n \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\delta t} + \lambda \frac{\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_{j-1}^n}{2\delta x} = \delta t \partial_t^2 u(n\delta t, j\delta x) + \delta x^2 \partial_x^3 u(n\delta t, j\delta x) + \mathcal{O}(\delta t^2 + \delta x^3).$$

Démonstration. La fonction u étant solution de l'équation, on a

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t, x) &= -\partial_t (\lambda \partial_x u(t, x) + \frac{\lambda^2 \delta t}{2} \partial_x^2 u(t, x)) \\ &= \lambda \partial_x (\lambda \partial_x u(t, x) + \frac{\lambda^2 \delta t}{2} \partial_x^2 u(t, x)) + \frac{\lambda^2 \delta t}{2} \partial_x^2 (\lambda \partial_x u(t, x) + \frac{\lambda^2 \delta t}{2} \partial_x^2 u(t, x)) \\ &= \lambda^2 \partial_x^2 u(t, x) + \lambda^3 \delta t \partial_x^3 u(t, x) + \frac{\lambda^4 \delta t^2}{4} \partial_x^4 u(t, x) \\ &= \lambda^2 \partial_x^2 u(t, x) + \mathcal{O}(\delta t). \end{aligned}$$

En utilisant les calculs fait dans la preuve de la proposition 3.1.2, on obtient

$$\begin{aligned} \eta_j^n &= \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\delta t} + \lambda \frac{\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_{j-1}^n}{2\delta x} \\ &= \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\delta t} + \lambda \frac{\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_{j-1}^n}{2\delta x} - \partial_t u(n\delta t, j\delta x) - \lambda \partial_x u(n\delta t, j\delta x) - \frac{\lambda^2 \delta t}{2} \partial_x^2 u(n\delta t, j\delta x) \\ &= \frac{\delta t}{2} \partial_t^2 u(n\delta t, j\delta x) + \lambda \frac{\delta x^3}{6} \partial_x^3 u(n\delta t, j\delta x) + \frac{\delta t^2}{6} \partial_t^3 u(\bar{t}, j\delta x) + \lambda \frac{\delta x^3}{48} (\partial_x^3 u(n\delta t, \bar{x}) - \partial_x^3 u(n\delta t, \tilde{x})). \end{aligned}$$

□

L'équation (3.1.2) est une équation parabolique *rétrograde*. Or, on a vu au chapitre 2 qu'une telle équation tend à rendre les solutions de plus en plus irrégulières. Ceci explique pourquoi le schéma (3.1.1) est instable.

3.1.2 Le schéma de Lax-Wendroff

Pour éviter le comportement instable prévu à la partie précédente, on va introduire un terme supplémentaire dans le schéma qui va compenser le terme de diffusion rétrograde qui apparaissait de manière parasite dans le schéma (3.1.1).

On pose donc

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} + \lambda \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\delta x} - \frac{\lambda^2 \delta t}{2} \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\delta x^2} = 0. \quad (3.1.3)$$

Cette équation équivaut à la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\lambda \delta t}{2\delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2 \delta t^2}{2\delta x^2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n) \\ &= \left(1 - \left(\frac{\lambda \delta t}{\delta x}\right)^2\right) u_j^n + \frac{\lambda \delta t}{2\delta x} \left(\frac{\lambda \delta t}{\delta x} + 1\right) u_{j-1}^n + \frac{\lambda \delta t}{2\delta x} \left(\frac{\lambda \delta t}{\delta x} - 1\right) u_{j+1}^n. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

On en déduit la propriété de stabilité suivante :

Propriété 3.1.4. *Le schéma (3.1.3) est stable dans $\mathbb{L}^\infty$ dès que $|\lambda| \frac{\delta t}{\delta x} = 1$.*

Démonstration. Pour que le schéma soit stable, il suffit, en vertu de l'égalité (3.1.4) que les trois coefficients $1 - \left(\frac{\lambda \delta t}{\delta x}\right)^2$, $\frac{\lambda \delta t}{\delta x} \left(\frac{\lambda \delta t}{\delta x} + 1\right)$ et $\frac{\lambda \delta t}{\delta x} \left(\frac{\lambda \delta t}{\delta x} - 1\right)$ soient positifs. La positivité du premier coefficient impose que la quantité $\frac{\lambda \delta t}{\delta x}$ soit dans l'intervalle $[-1, 1]$, et celle des deux autres coefficients imposent qu'elle ne soit ni dans $] -1, 0[$ ni dans $]0, 1[$. Finalement, on trouve que $\frac{\lambda \delta t}{\delta x} \in \{-1, 1\}$. $\square$

3.2 Schéma décentré

On s'intéresse dans cette partie au schéma suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} + \lambda \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\delta x} = 0 \quad (3.2.1)$$

ce qui donne la relation de récurrence :

$$u_j^{n+1} = \left(1 - \lambda \frac{\delta t}{\delta x}\right) u_j^n + \lambda \frac{\delta t}{\delta x} u_{j-1}^n.$$

Ici, on a utilisé le même principe que pour le schéma (3.1.1), mais on a fait une discrétisation *dis-symétrique* en espace. Cela est assez naturel, étant donné que l'équation (3.0.1) est elle aussi dis-symétrique en espace, puisqu'elle présente une vitesse λ dirigée dans une certaine direction.

On obtient pour ce schéma la condition suivante de stabilité :

Propriété 3.2.1. *Le schéma (3.2.1) est stable dans $\mathbb{L}^\infty$ si $\lambda \frac{\delta t}{\delta x}$ est dans $[0, 1]$.*

Démonstration. Le schéma est stable dans $\mathbb{L}^\infty$ dès que les deux coefficients $1 - \lambda \frac{\delta t}{\delta x}$ et $\lambda \frac{\delta t}{\delta x}$ sont positifs, ce qui correspond bien à la condition annoncée. $\square$

Notamment, on remarque que la condition de stabilité ne peut être vérifiée que si $\lambda \geq 0$. Dans le cas contraire, dans le schéma (3.2.1) on doit remplacer la différence finie à gauche en espace par une différence finie à droite. Le schéma obtenu est alors

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} + \lambda \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\delta x} = 0.$$

On a le résultat suivant :

Propriété 3.2.2. *L'erreur de consistance de l'équation (3.0.1) par le schéma (3.2.1) est donnée par*

$$\varepsilon_j^n \stackrel{\text{d'éf.}}{=} \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\delta t} + \lambda \frac{\bar{u}_j^n - \bar{u}_{j-1}^n}{\delta x} = \frac{\delta t}{2} \partial_t^2 u(n\delta t, j\delta x) + \mathcal{O}(\delta t^2 + \delta x^2).$$

Démonstration. À l'aide des développements de Taylor donnés dans la preuve de la proposition 3.1.2, on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^j &= \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\delta t} + \lambda \frac{\bar{u}_j^n - \bar{u}_{j-1}^n}{\delta x} \\ &= \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\delta t} + \lambda \frac{\bar{u}_j^n - \bar{u}_{j-1}^n}{\delta x} - \partial_t u(t, x) - \lambda \partial_x u(t, x) \\ &= \frac{\delta t}{2} \partial_t^2 u(n\delta t, j\delta x) - \lambda \frac{\delta x}{2} \partial_x^2 u(n\delta t, j\delta x) + \frac{\delta t^2}{6} \partial_t^3 u(\bar{t}, j\delta x) + \lambda \frac{\delta x^2}{6} \partial_x^3 u(n\delta t, \bar{x}). \end{aligned}$$

□

Toutefois, on a un phénomène de régularisation parasite, en vertu de la proposition suivante, qui s'obtient en poussant les développements de Taylor de la propriétés précédente un ordre plus loin.

Propriété 3.2.3. *Soit u une solution de l'équation*

$$\partial_t u(t, x) + \lambda \partial_x u(t, x) - \frac{\lambda^2 \delta t}{2} \partial_x^2 u(t, x) = 0. \quad (3.2.2)$$

L'erreur de consistance de la fonction u pour le schéma (3.2.1) est donnée par

$$\eta_j^n \stackrel{\text{d'éf.}}{=} \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\delta t} + \lambda \frac{\bar{u}_j^n - \bar{u}_{j-1}^n}{\delta x} = \frac{\delta t}{2} \partial_t^2 u(n\delta t, j\delta x) + \mathcal{O}(\delta t^2 + \delta x^3).$$

Autrement dit, le schéma (3.2.1) est consistant avec l'équation parabolique (3.2.2). On parle de *diffusion numérique*. Le terme parabolique apparaissant dans (3.2.2) ayant pour effet de régulariser les solutions, la solution du schéma (3.2.1) sera plus régulière que la solution de l'équation (3.0.1).

Chapitre 4

Interprétation probabiliste des EDPs

Il existe des liens très forts entre les équations aux dérivées partielles et les équations différentielles stochastiques, grâce à deux ingrédients : la formule d'Itô et la propriété de martingale.

4.1 Mouvement Brownien et opérateur Laplacien

On considère un ouvert connexe borné Ω de $\mathbb{R}^d$, un élément x de Ω et $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien issu de x sous la probabilité $\mathbb{P}^x$.

4.1.1 Équation de Poisson

Commençons par le lemme suivant :

Lemme 4.1.1. *Soit Ω un ouvert borné et $x \in \Omega$. On note $\tau = \inf\{t \geq 0, W_t \notin \Omega\}$. Alors le temps τ est $\mathbb{P}^x$ -presque sûrement fini.*

Démonstration. Soit $M > 0$ tel que $\Omega \subset B(x, M)$. On a $\{\tau \geq t\} \subset \{|W_t^x - x| \leq M\}$, de sorte que

$$\mathbb{P}^x(\tau \geq t) \leq \mathbb{P}^x(|W_t^x - x| \leq M) = \mathbb{P}\left(G \leq \frac{M}{\sqrt{t}}\right),$$

où G est une variable aléatoire Gaussienne de covariance I_d . On a bien $\mathbb{P}\left(G \leq \frac{M}{\sqrt{t}}\right) \rightarrow 0$ quand t tend vers ∞ . $\square$

Pour deux fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, on considérons l'équation elliptique

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta u(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ u(x) = g(x) & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Un argument probabiliste va nous permettre de montrer l'unicité (mais pas l'existence) d'une solution suffisamment régulière de cette équation, pour laquelle on aura aussi un principe du maximum.

Théorème 4.1.2. *Supposons que cette équation admette une solution u de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\bar{\Omega}$. Alors la fonction u est donnée par l'expression*

$$u(x) = \mathbb{E}^x(g(W_\tau)) + \mathbb{E}^x \int_0^\tau f(W_t) dt.$$

Notamment une telle fonction est unique. Cette formule donne le principe du maximum

$$\inf_{\partial\Omega} g + \inf_{\Omega} f \mathbb{E}\tau \leq \inf_{\Omega} u \leq \sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} g + \sup_{\Omega} f \mathbb{E}\tau.$$

Démonstration. L'hypothèse de régularité $\mathcal{C}^2$ sur u nous permet d'appliquer la formule d'Itô au processus $u(W_t)$, ce qui donne

$$u(W_{t \wedge \tau}) = u(x) + \int_0^{t \wedge \tau} \nabla u(W_s) \cdot dW_s + \frac{1}{2} \int_0^{t \wedge \tau} \Delta u(W_s) ds.$$

En passant à l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}^x(u(W_{t \wedge \tau})) = u(x) - \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \tau} f(W_t) dt.$$

En faisant tendre t vers l'infini, on obtient l'égalité cherchée. □

Quelques cas particuliers

– Pour $g = 0$ et $f = 1$, on obtient l'équation

$$\begin{cases} \Delta u(x) = -2 & \text{si } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans ce cas, le théorème 4.1.2 montre que la solution u est donnée par

$$u(x) = \mathbb{E}^x[\tau].$$

Par exemple, sur l'intervalle $\Omega =]0, 1[$, on trouve

$$\mathbb{E}^x(\tau) = x(1 - x).$$

– Pour $f = 0$, on obtient l'équation

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega, \\ u(x) = g(x) & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans ce cas, le théorème 4.1.2 montre que la solution u est donnée par

$$u(x) = \mathbb{E}^x[g(W_\tau)].$$

Par exemple, si $g = \mathbf{1}_A$ où A est une partie de $\partial\Omega$, la fonction u donne la probabilité pour $(W_t)_{t \geq 0}$ de quitter l'ouvert Ω à travers A :

$$u(x) = \mathbb{P}^x(W_\tau \in A).$$

Dans le cas de l'intervalle $\Omega =]0, 1[$, on trouve

$$\mathbb{P}^x(W_\tau = 0) = 1 - x \text{ et } \mathbb{P}(W_\tau = 1) = x.$$

Application : récurrence du mouvement Brownien

Un cas intéressant est le cas du mouvement Brownien dans une couronne. On pose $\Omega_{r,R} = B(0, R) \setminus \overline{B(0, r)}$.

Cherchons une fonction u vérifiant $\Delta u(x) = 0$ sur $\Omega_{r,R}$. Par symétrie, on peut chercher un u de la forme $u(x) = \varphi(|x|^2)$. On a alors

$$\nabla u(x) = \nabla(\varphi(|x|^2)) = 2x\varphi'(|x|^2),$$

et

$$\Delta u(x) = \nabla \cdot (\nabla u(x)) = \nabla \cdot (2x\varphi'(|x|^2)) = 2(\nabla \cdot x)\varphi'(|x|^2) + 2x(\nabla \varphi'(|x|^2)) = 2d\varphi'(|x|^2) + 4|x|^2\varphi''(|x|^2).$$

Par conséquent, on cherche une fonction φ' solution de l'équation différentielle

$$dy(x) + 2xy'(x) = 0.$$

La résolution de cette équation donne

$$\varphi'(x) = Cx^{-\frac{d}{2}}$$

d'où

$$\varphi(x) = \begin{cases} a \ln(x) + b & \text{si } d = 2, \\ ax^{\frac{2-d}{2}} + b & \text{si } d \neq 2, \end{cases} \quad \text{soit encore} \quad u(x) = \begin{cases} a \ln(|x|) + b & \text{si } d = 2, \\ a|x|^{2-d} + b & \text{si } d \neq 2, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

pour certaines constantes a et b .

Notons $\tau_{r,R}$ le temps de sortie de la couronne $\Omega_{r,R}$ par le mouvement Brownien, et τ_r le temps d'atteinte de la sphère de rayon r . Les calculs précédents montrent que la quantité

$$\mathbb{P}^x(|W_{\tau_{r,R}}| = r) = \mathbb{P}(\tau_r < \tau_R),$$

qui est la probabilité que le Brownien quitte la couronne par la sphère intérieure, est donnée par la fonction harmonique dans la couronne $\Omega_{r,R}$, nulle sur la sphère de rayon R et valant 1 sur la sphère de rayon r . Par des combinaisons linéaires à partir des fonctions de (4.1.1), on obtient

$$\mathbb{P}^x(\tau_r < \tau_R) = \begin{cases} \frac{\ln(R) - \ln(|x|)}{\ln(R) - \ln(r)} & \text{si } d = 2, \\ \frac{|x|^{2-d} - R^{2-d}}{r^{2-d} - R^{2-d}} & \text{si } d \neq 2, \end{cases} \quad (4.1.2)$$

En faisant tendre r vers 0 dans (4.1.2), puis R vers ∞ , on obtient

$$\mathbb{P}(\tau_0 < \infty) = 0,$$

quelle que soit la dimension, où τ_0 est le temps d'atteinte du point 0. Autrement dit, en dimension supérieure ou égale à 2, un mouvement Brownien n'attend presque sûrement jamais un point donné a priori (distinct de son point de départ).

De même, en faisant tendre R vers l'infini dans (4.1.2), on obtient (pour $|x| > r$)

$$\mathbb{P}^x(\tau_r < \infty) = \begin{cases} 1 & \text{si } d = 2, \\ \left(\frac{|x|}{r}\right)^{2-d} & \text{si } d \neq 2. \end{cases}$$

où τ_r est le temps d'atteinte de la sphère de rayon r .

En résumé, on a montré :

Théorème 4.1.3. *En dimension 2, le mouvement Brownien atteint en temps fini toute sphère de rayon > 0 fixée a priori, mais n'atteint aucun point fixé a priori.*

En dimension 3 ou plus, le mouvement Brownien a une probabilité non nulle de ne jamais atteindre une sphère fixée a priori (partant d'un point extérieur à la sphère).

4.1.2 L'équation de la chaleur

Soit μ_0 une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ et soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien dont la condition initiale est distribuée selon μ_0 .

Pour un t positif fixé, on note μ_t la loi de W_t .

Alors $(\mu_t)_{t \geq 0}$ est solution de l'équation de la chaleur issue de μ_0 :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \frac{1}{2} \Delta u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \Omega \\ u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega \\ u(0, x) = \mu(dx). \end{cases}$$

au sens faible suivant : pour toute fonction φ de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω telle que $\nabla\varphi$ et $\Delta\varphi$ soient bornées, on a l'égalité

$$\int_{\Omega} \varphi(x) \mu_t(dx) - \int_{\Omega} \varphi(x) \mu_0(dx) = \frac{1}{2} \int_0^t \left(\int_{\Omega} \Delta\varphi(x) \mu_s(dx) \right) ds.$$

Démonstration. On applique la formule d'Itô au processus $(\varphi(X_t))_{t \geq 0}$, et on obtient

$$\varphi(W_t) - \varphi(W_0) = \int_0^t \nabla\varphi(W_s) \cdot dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta\varphi(W_s) ds.$$

En passant à l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}\varphi(W_t) - \mathbb{E}\varphi(W_0) = \frac{1}{2} \int_0^t \mathbb{E}\Delta\varphi(W_s) ds.$$

On conclut en remarquant que, μ_t étant la loi de la variable W_t , on a l'égalité

$$\mathbb{E}\varphi(W_t) = \int_{\Omega} \varphi(x) \mu_t(dx).$$

□

4.1.3 L'équation de la chaleur rétrograde

On considère l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \frac{1}{2} \Delta u(t, x) = 0 & 0 < t < T, x \in \Omega, \\ u(T, x) = f(x) & x \in \Omega. \end{cases} \quad (4.1.3)$$

On a la représentation probabiliste suivante :

Théorème 4.1.4 (Feynman-Kac). *Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^{1,2}$, solution au sens classique de l'équation (4.1.3) ^(note 1). Alors, u est donnée par la formule*

$$u(t, x) = \mathbb{E}[f(W_T)|W_t = x].$$

Démonstration. Comme la fonction u est de classe $\mathcal{C}^{1,2}$, on peut appliquer la formule d'Itô au processus $(u(t, W_t))_{t \geq 0}$, entre t et T . On obtient alors

$$u(T, W_T) - u(t, W_t) = \int_t^T \partial_t u(s, W_s) + \frac{1}{2} \Delta u(s, W_s) ds + \int_t^T \nabla u(s, W_s) \cdot dW_s.$$

La fonction u étant solution classique de (4.1.3), l'égalité précédente se récrit

$$f(W_T) - u(t, W_t) = \int_t^T \nabla u(s, W_s) \cdot dW_s,$$

et en passant à l'espérance (conditionnellement à $W_t = x$), on obtient

$$0 = \mathbb{E}[f(W_T) - u(t, W_t)|W_t = x] = \mathbb{E}[f(W_T) - u(t, x)|W_t = x].$$

□

4.2 Processus de diffusion

La plupart des résultats de la partie précédente se généralisent pour des processus de diffusion plus généraux. Par *processus de diffusion*, on entend un processus $(X_t^x)_{t \geq 0}$ satisfaisant l'équation différentielle stochastique

$$dX_t^x = b(X_t^x)dt + \sigma(X_t^x)dW_t, \quad (4.2.1)$$

où $b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times n}$ sont des fonctions supposées suffisamment régulières.

En appliquant la formule d'Itô au processus $\varphi(X_t^x)$, pour une certaine fonction régulière φ , on obtient

$$\begin{aligned} d\varphi(X_t^x) &= \sum_{i=1}^d \partial_i \varphi(X_t) b_i(X_t) dt + \sum_{1 \leq i, j \leq d} \partial_i \varphi(X_t) \sigma_{ij}(X_t) dW_t^i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} \sum_{k=1}^n \partial_{ij} \varphi(X_t) \sigma_{ik}(X_t) \sigma_{jk}(X_t) dt \\ &= \left(b(X_t^x) \cdot \nabla \varphi(X_t^x) + \frac{1}{2} (\sigma \sigma^T)(X_t^x) : \nabla^2 \varphi(X_t^x) \right) dt + \nabla \varphi(X_t) \cdot \sigma(X_t^x) dW_t. \end{aligned}$$

Dans la formule précédente, on a noté $\nabla \cdot b = \sum_{i=1}^d \partial_i b_i$ la divergence d'un vecteur et, pour deux matrices m et n , on note $m : n$ le produit de Hadamard, défini par

$$m : n = \sum_{1 \leq i, j \leq d} m_{ij} n_{ij}.$$

(note 1). C'est-à-dire que u est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à la variable de temps, de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à la variable d'espace et que les dérivées partielles vérifient ponctuellement la relation (4.1.3)

On a donc

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\varphi(X_t^x) - \varphi(X_0^x) - \int_0^t \left(b(X_s^x) \cdot \nabla \varphi(X_s^x) + \frac{1}{2} (\sigma \sigma^T)(X_s^x) : \nabla^2 \varphi(X_s^x) \right) ds \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^t \nabla \varphi(X_s^x) \cdot \sigma(X_s^x) dW_s \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

puisque l'intégrale stochastique au second membre définit une martingale.

À t fixé, si l'on note u_t la loi de la variable X_t^x , on peut récrire l'expression précédente sous la forme

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi u_t - \int_{\mathbb{R}} \varphi u_0 = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(b \cdot \nabla \varphi + \frac{1}{2} (\sigma \sigma^T) : \nabla^2 \varphi \right) u_t dt.$$

Cette dernière équation est une formulation faible de l'équation

$$\partial_t u_t = -\nabla \cdot (b u_t) + \frac{1}{2} \nabla^2 : (\sigma \sigma^T u_t). \quad (4.2.2)$$

Dans cette dernière équation, le terme $-\nabla \cdot (b u_t)$ est dû au terme de dérive $b(X_t^x) dt$ dans l'équation différentielle stochastique, tandis que le terme de diffusion $\frac{1}{2} \nabla^2 : (\sigma \sigma^T u_t)$ est dû au terme correspondant à une intégrale stochastique contre un mouvement Brownien $\sigma(X_t^x) dW_t$.

On peut également faire apparaître une autre équation aux dérivées partielles à partir de l'équation (4.2.1).

En effet, considérons une solution régulière de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t v(t, x) + b(t, x) \cdot \nabla v(t, x) + \frac{1}{2} \sigma \sigma^T(t, x) : \nabla^2 v(t, x) = 0, & 0 < t < T, x \in \Omega, \\ v(T, x) = f(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Fixons un temps t . En appliquant la formule d'Itô au processus $v(t, X_t)$, on obtient

$$dv(t, X_t) = \left(\partial_t v + b \cdot \nabla v + \frac{1}{2} (\sigma \sigma^T) : \nabla^2 v \right) (X_t) dt + \nabla v(t, X_t) \cdot \sigma(X_t) dW_t.$$

Comme la fonction v vérifie l'équation (4.2.3) et que l'intégrale stochastique est une martingale, on a, en intégrant entre 0 et t et en passant à l'espérance,

$$v(t, x) = \mathbb{E}(v(0, X_t^x)) = \mathbb{E}(f(X_t^x)).$$

Par conséquent, si l'équation (4.2.3) admet une solution, alors cette solution est nécessairement donnée par $\mathbb{E}(f(X_t^x))$.

Ces deux équations peuvent s'écrire

$$\partial_t u(t, x) = L^* u(t, x) \quad \text{et} \quad \partial_t v(t, x) = L v(t, x),$$

où L est l'opérateur défini par

$$L = b \cdot \nabla + \frac{1}{2} (\sigma \sigma^T) : \nabla^2 \quad (4.2.4)$$

et où L^* est l'opérateur défini par

$$L^* = -\nabla \cdot (\cdot \times b) + \frac{1}{2} \nabla^2 : (\cdot \times \sigma \sigma^T),$$

qui est l'opérateur adjoint de L , défini, pour une mesure μ donnée, par

$$\int_{\Omega} f(x) L^* \mu(dx) = \int_{\Omega} Lf(x) \mu(dx).$$

En fait on a même un résultat un peu plus général :

Théorème 4.2.1. *Soit u une solution régulière à l'équation*

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + Lu(t, x) + g(x) = 0 & 0 < t < T, \quad x \in \Omega \\ u(T, x) = f(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

alors u est donnée par

$$u(t, x) = \mathbb{E} \left[f(X_T) + \int_t^T g(X_s) ds \middle| X_t = x \right].$$

Les équations de type elliptique peuvent avoir une interprétation probabiliste par le biais suivant :

Théorème 4.2.2. *Soit u une solution régulière (de classe C^2 , par exemple) du problème elliptique suivant :*

$$\begin{cases} Lu(x) = g(x), & x \in \Omega \\ u(x) = f(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors, u est donnée par

$$u(x) = \mathbb{E} \left[f(X_{\tau}) + \int_0^{\tau} g(X_s) ds \middle| X_0 = x \right],$$

où τ est le temps de sortie de l'ouvert Ω par le processus $(X_t)_{t \geq 0}$.

Démonstration. Les preuves des ces deux résultats sont essentiellement les mêmes que dans le cas du mouvement Brownien. $\square$

4.3 Exemple : l'équation de Black-Scholes

Le modèle de Black-Scholes consiste à considérer un actif financier dont le cours S_t évolue selon l'équation suivante

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t, \quad (4.3.1)$$

où W est un mouvement Brownien, r est le coefficient de *dérive* (ou en anglais *drift*) et σ est le coefficient de *diffusion* (également appelé *volatilité* dans un contexte financier). La dérivée logarithmique de S_t est donc donné par un mouvement Brownien avec dérive. La justification de ce modèle tient dans le fait que le cours d'un actif financier doit être positif et invariant par multiplication par une constante. La quantité naturelle à étudier est donc $\log S_t$ plutôt que S_t lui même. Choisir pour la dérivée logarithmique $\frac{dS_t}{S_t}$

une diffusion avec coefficients constants est ensuite seulement une hypothèse simplificatrice permettant des calculs explicites.

Notons que l'équation (4.3.1) implique que S_t peut se mettre sous forme exponentielle. On applique en effet la formule d'Itô au processus $S_t e^{-\sigma W_t}$. On obtient

$$\begin{aligned} d(S_t e^{-\sigma W_t}) &= \left(dS_t - S_t \sigma dW_t + S_t \frac{\sigma^2}{2} dt - \sigma d\langle S, W \rangle_t \right) e^{-\sigma W_t} \\ &= \left(S_t r dt + S_t \sigma dW_t - S_t \sigma dW_t + S_t \frac{\sigma^2}{2} dt - S_t \sigma^2 dt \right) e^{-\sigma W_t} \\ &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) S_t e^{-\sigma W_t} dt, \end{aligned}$$

ce qui donne donc

$$S_t e^{-\sigma W_t} = S_0 e^{rt - \frac{\sigma^2}{2} t}, \text{ ou encore } S_t = S_0 e^{rt - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t}.$$

Le prix d'un option dans le modèle de Black-Scholes est donné par

$$p(t, s) = \mathbb{E}[e^{-r(T-t)} \varphi(S_T) | S_t = s],$$

où φ est une fonction donnée. Ce prix satisfait en fait une équation aux dérivées partielles, ce qui peut s'avérer utile, par exemple pour en calculer une approximation numérique.

Propriété 4.3.1. *Si l'équation*

$$\begin{cases} \partial_t p(t, s) + Lp(t, s) - rp(t, s) = 0, & 0 < t < T, \quad s > 0 \\ p(T, s) = \varphi(s), & s > 0, \end{cases} \quad (4.3.2)$$

où L est le générateur de $(S_t)_{t \geq 0}$ admet une solution régulière, alors cette solution est p .

On rappelle que le générateur de $(S_t)_{t \geq 0}$ est donné, en vertu de la formule (4.2.4) par

$$L = sr \partial_s + \frac{s^2 \sigma^2}{2} \Delta.$$

Démonstration. On considère la fonction $(t, s) \mapsto e^{r(T-t)} p(t, s)$, où p est une solution régulière de l'équation (4.3.2). En dérivant par rapport à t , on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t (e^{r(T-t)} p(t, s)) &= e^{r(T-t)} \partial_t p(t, s) - r e^{r(T-t)} p(t, s) \\ &= -e^{r(T-t)} Lp(t, s) + e^{r(T-t)} rp(t, s) - e^{r(T-t)} rp(t, s) \\ &= -L(e^{r(T-t)} p(t, s)). \end{aligned}$$

La fonction $(t, s) \mapsto e^{r(T-t)} p(t, s)$ est donc une solution régulière de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t e^{r(T-t)} p(t, s) + L e^{r(T-t)} p(t, s) = 0 & 0 < t < T, \quad s > 0 \\ e^{r(T-t)} p(T, s) = \varphi(s) & s > 0. \end{cases}$$

La formule de Feynman-Kac donne alors

$$e^{r(T-t)} p(t, s) = \mathbb{E}[\varphi(S_T) | S_t = s].$$

□