

Devoir Maison n°1

(pour le contrôle n°1, semaine du 9 février)

On possède une urne, avec i boules jaunes, et j boules noires. On prend sans remise une boule au hasard dans l'urne, jusqu'à ce que l'on tire une boule noire. On appelle T le temps que dure ce jeu (c'est-à-dire le nombre de boules tirées jusqu'à la première boule noire comprise).

1) Montrer que, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, i\}$, on a

$$P(T > k) = \binom{i+j-k}{j} / \binom{i+j}{j}.$$

2) Montrer que $\binom{i+j+1}{j+1} = \sum_{k=0}^i \binom{i+j-k}{j}$.

3) Montrer que $E[T] = \sum_{k=0}^i P(T > k)$ (ceci est vrai pour n'importe quelle variable aléatoire T à valeur dans \mathbb{N}). En déduire $E[T]$.