DM n°2 – à rendre pour le 2 mars 2015.

Des points sont prévus pour la qualité de la rédaction.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire réelle de loi Gaussienne centrée réduite.

1) Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}[e^{tX}] = e^{t^2/2}.$$

2) Montrer, en utilisant une inégalité fondamentale du cours, que
$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{e^{t^2/2}}{e^{ta}}.$$

3) En déduire que
$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-a^2/2}.$$

Dans la suite nous allons donner un équivalent, lorsque a tend vers $+\infty$, de $\mathbb{P}(X \geq a)$.

4) Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f et f' soient bornées sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. Montrer l'égalité
$$\forall a > 0, \quad \mathbb{E}[(Xf(X) - f'(X))\mathbb{1}_{X \geq a}] = f(a)\frac{e^{-a^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

5) En appliquant l'égalité précédente à la fonction $f(x) = 1/x$, montrer l'équivalent
$$\mathbb{P}(X \geq a) \sim \frac{e^{-a^2/2}}{a\sqrt{2\pi}},$$
lorsque a tend vers $+\infty$.

Exercice 2. On suspend un laser à 1 m au dessus du sol. L'angle qu'il forme avec la verticale est aléatoire, notée Θ, et suit la loi uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On note X le point marqué au sol par le laser (voir la Figure ci-dessous). Donner la densité de la loi de X.