Série d'exercices n°1

Exercice 1.
Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 3/4$. Donner un encadrement optimal pour la valeur de $\mathbb{P}(A \cap B)$. Donner des exemples dans lesquels les bornes de l'encadrement sont atteintes.

Exercice 2.
Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire avec remise 4 boules de l'urne.

1. Décrire un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pouvant modéliser cette expérience.
2. Déterminer les probabilités d'obtenir :
   (a) quatre nombres dans un ordre strictement croissant.
   (b) quatre nombres dans un ordre croissant (au sens large).
   (c) au moins une fois le nombre 3.

Exercice 3.
Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire successivement sans remise n boules de l'urne, avec $1 \leq n \leq N$.

1. Quel est l'ensemble Ω des résultats possibles ? Calculer card(Ω).
2. Les boules numérotées de 1 à M sont rouges ($M < N$) et les boules numérotées de $M+1$ à N sont blanches. Soit A_k l'événement {La k-ième boule tirée est rouge}.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(A_k)$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(A_k \cap A_m)$.

Exercice 4.
Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20. On tire n boules sans remise de cette urne et on note X le plus petit des numéros tirés.

1. Décrire un espace probabilisé pouvant modéliser cette expérience.
2. On suppose que $n = 3$. Calculer $\mathbb{P}(X = 8)$ et $\mathbb{P}(X \geq 8)$.
3. On revient au cas général où $n \leq 20$. Calculer de façon indépendante :
   (a) $\mathbb{P}(X = k)$;
   (b) $\mathbb{P}(X \geq k)$.

Exercice 5.
Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbf{1}_{\cap_{k=1}^{n} A_k} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{1}_{\cup_{k=1}^n A_k} = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbf{1}_{A_k}).$$

3. On note $p_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$. Montrer que

$$\mathbb{P}(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} p_k.$$

4. Un facteur répartit uniformément au hasard n factures dans n boîtes à lettres (une par boîte). Calculer la probabilité $p(n)$ qu'une facture au moins parvienne à son destinataire. Calculer $\lim_{n \to +\infty} p(n)$.

Exercice 6.
Lors d'un examen à correction automatique, on pose dix questions et pour chacune d'elles on demande au candidat de choisir entre trois réponses (la bonne et deux fausses). On envisage le cas d'un candidat qui répond au hasard à toutes les questions (choisissant indépendamment chaque réponse avec probabilité $1/3$). Soit X le nombre de réponses justes de ce candidat. Calculer la loi de X.

Exercice 7.
Une urne contient trois sacs. Le sac S_1 contient 2 pièces d'or, le sac S_2 contient 2 pièces ordinaires, le sac S_3 contient une pièce d'or et une pièce ordinaire. Le jeu consiste à tirer un sac au hasard (avec probabilité uniforme) puis à tirer une pièce au hasard dans ce sac.

1. Quelle est la probabilité de tirer une pièce d'or ?

2. Supposons que l'on ait tiré une pièce d'or. Quelle est alors la probabilité pour que l'autre pièce du sac soit en or ?

Exercice 8.
Un document a été perdu. La probabilité pour qu'il se trouve dans un meuble est p, $(0 < p < 1)$. Ce meuble comporte sept tiroirs. Dans le cas où le document est dans le meuble, il se trouve avec même probabilité dans chacun des sept tiroirs. On explore six tiroirs sans trouver le document. Quelle est la probabilité de le trouver dans le septième ?

Exercice 9.
Soit n un entier, et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$:

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\},\ \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{n}.$$

Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X \geq Y)$. Déterminer la loi de $X - Y$.

Exercice 10.
Un lac contient N poissons. (N est inconnu et $N > 2000$). On pêche 1000 poissons, on les marque et on les rejette à l'eau. On repêche alors 1000 poissons (uniformément parmi tous les poissons du lac et indépendamment de la première pêche). Soit X le nombre de poissons marqués parmi ceux que l'on a repêchés.

1. Calculer la loi de X.

2. En réalité, on a repêché 10 poissons marqués. Déterminer N pour que $\mathbb{P}(X = 10) \geq \mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que $\mathbb{P}(X = 10)$ soit le plus grand possible.