Université Pierre et Marie Curie Probabilités
Année 2014-2015 LM390

Série d'exercices n°1 - Corrigé

Rappel :

- $C_n^k = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ *est le nombre de choix* **non ordonnés** *de k éléments distincts pris parmi n.*
- $A_n^k := \frac{n!}{(n-k)!}$ *est le nombre de choix* **ordonnés** *de k éléments distincts pris parmi n.*

Exercice 1.
Tout d'abord, par l'inclusion $A \cap B \subset A$, on a la majoration suivante de $\mathbb{P}(A \cap B)$:

$$\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}.$$

Par ailleurs, on obtient une minoration en écrivant

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \mathbb{P}(A \cup B) \geq \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Montrons maintenant que ces bornes peuvent être atteintes. On considère la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ sur l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Le maximum est atteint par exemple pour

$$A = B = \{1, 2, 3\}, \text{ avec } A \cap B = \{1, 2, 3\},$$

tandis que le minimum est atteint pour

$$A = \{1, 2, 3\},\ B = \{1, 2, 4\}, \text{ de sorte que } A \cap B = \{1, 2\}.$$

Exercice 2.

1. Un espace probabilisé pouvant être associé à cette expérience est

$$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3, a_4), a_i \in \{1, \cdots, 10\}\} = \{1, \ldots, 10\}^4.$$

   L'ensemble étant fini, on choisit comme tribu $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les parties : $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. On définit sur $\mathcal{P}(\Omega)$ la probabilité uniforme :

$$\forall A \subset \Omega,\ \mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}(A)}{10^4}$$

2. (a) Soit A_1 l'ensemble de tous les quadruplets dans un ordre strictement croissant. Alors le nombre d'éléments de A_1 est le nombre de combinaisons $\binom{10}{4}$. On peut le montrer de deux façons différentes :
   - A_1 est en bijection avec l'ensemble des parties à 4 éléments pris parmi 10. En effet, chaque partie est associée de manière unique avec une suite croissante (il suffit d'arranger les éléments par ordre croissant)
   - on peut aussi voir que le nombre de quadruplets (a_1, a_2, a_3, a_4) avec 4 éléments distincts pris parmi 10 est A_{10}^4, qu'on doit ensuite diviser par 4! pour ne compter que les quadruplets qui sont strictement croissants.

La probabilité d'obtenir quatre nombres dans un ordre strictement croissant est donc

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{\binom{10}{4}}{10^4} = \frac{210}{10000} = 0,021.$$

(b) Soit A_2 l'ensemble de tous les quadruplets dans un ordre croissant au sens large. Dans A_2, il y a

- 10 quadruplets de nombres tous identiques $(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$;
- $2 \times \binom{10}{2}$ quadruplets de nombres dont trois sont égaux $(\alpha, \alpha, \alpha, \beta)$ et $(\alpha, \beta, \beta, \beta)$, avec $\alpha < \beta$;
- $3 \times \binom{10}{3}$ quadruplets de nombre dont deux sont égaux $(\alpha, \alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha, \beta, \beta, \gamma)$ et $(\alpha, \beta, \gamma, \gamma)$, avec $\alpha < \beta < \gamma$;
- $\binom{10}{2}$ quadruplets de nombres composés de deux couples de nombres identiques $(\alpha, \alpha, \beta, \beta)$, avec $\alpha < \beta$;
- $\binom{10}{4}$ quadruplets de nombres tous distincts $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, avec $\alpha < \beta < \gamma < \delta$.

Finalement :

$$\begin{aligned} P(A_2) &= \frac{10 + 2 \times \binom{10}{2} + 3 \times \binom{10}{3} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4}}{10^4} \\ &= \frac{10 + 2 \times 45 + 3 \times 120 + 45 + 210}{10^4} = \frac{715}{10^4} = 0,0715. \end{aligned}$$

On peut aussi raisonner de la manière suivante : L'application $(a_1, a_2, a_3, a_4) \mapsto (a_1, a_2+1, a_3+2, a_4+3)$ est une bijection de A_2 sur l'ensemble $A_2' = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_1 < a_2 < a_3 < a_4,\ a_i = 1, \cdots, 13\}$. Le cardinal de A_2 est donc égal à celui de A_2', c'est à dire $\binom{13}{4} = 715$.

(c) Soit A_3 l'événement correspondant. Alors le cardinal du complémentaire A_3^c de A_3 est le nombre de quadruplets obtenus en réalisant cette expérience avec 9 nombres, c'est à dire $\mathrm{card}(A_3^c) = 9^4$. On a alors

$$\mathbb{P}(A_3) = 1 - \mathbb{P}(A_3^c) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 = \frac{10000 - 6561}{10000} = \frac{3439}{10000} = 0,3439.$$

Exercice 3.

1. On peut choisir l'espace probabilisé suivant :

$$\Omega = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n),\ a_i \in \{1, \cdots, N\},\ a_i \neq a_i \text{ si } i \neq j\}.$$

L'ensemble Ω étant fini, on choisit $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. On munit $(\Omega, \mathcal{F})$ de la probabilité uniforme :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{\mathrm{card}(A)}{A_N^n} = \frac{(N-n)!}{N!}\mathrm{card}(A).$$

2. (a) A_k s'écrit : $A_k = \{(a_1, \cdots, a_n) \in \Omega,\ a_k \in \{1, 2, \cdots, M\}\}$, et on a $\mathbb{P}(A_k) = \frac{\mathrm{card}(A_k)}{\mathrm{card}(\Omega)}$. Il reste à calculer $\mathrm{card}(A_k)$. On propose trois solutions:

- L'application

$$\begin{array}{ccc} A_k & \longrightarrow & A_1 \\ (a_1, \cdots, a_k, \cdots, a_n) & \mapsto & (a_k, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_n) \end{array}$$

est une bijection de A_k dans A_1, d'où $\mathrm{card}(A_k) = \mathrm{card}(A_1)$. Le cardinal de A_1 est $\mathrm{card}(A_1) = M(N-1)\cdots(N-n+1) = MA_{N-1}^{n-1}$, et on trouve $\mathbb{P}(A_k) = \frac{M}{N}$.

- On peut aussi dénombrer directement l'ensemble A_k. On a M choix pour la boule k. Une fois la boule k choisie, le nombre de choix pour les boules restantes est donné par le nombre de choix ordonnés de $n-1$ éléments distincts pris parmi $N-1$, à savoir A_{N-1}^{n-1}. On retrouve bien $\text{card}(A_k) = MA_{N-1}^{n-1}$.
- Troisième méthode : notons X_k le numéro de la boule k. C'est donc une variable aléatoire. Par symétrie, on a $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = 2) = \ldots = \mathbb{P}(X_k = N)$, donc vu que $\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X_k = i) = 1$, on obtient que $\mathbb{P}(X_k = i) = \frac{1}{N}$ pour tout $i \leq n$. On remarque que $\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(X_k \leq M) = \sum_{i=1}^{M} \mathbb{P}(X_k = i) = \frac{M}{N}$.

On remarque que la probabilité de l'événement A_k ne dépend pas de k et est égale à la proportion de boules rouges dans l'urne.

(b) Si $k = m$ alors $\mathbb{P}(A_k \cap A_m) = \mathbb{P}(A_m) = M/N$. On suppose donc que $k \neq m$.
De même qu'à la question précédente, on peut établir une bijection entre $A_k \cap A_m$ et $A_1 \cap A_2$, d'où $\mathbb{P}(A_k \cap A_m) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$. Enfin il est facile de voir que le cardinal de $A_1 \cap A_2$ est

$$\text{card}(A_1 \cap A_2) = M(M-1)(N-2) \cdots (N-n+1),$$

soit

$$\mathbb{P}(A_k \cap A_m) = \frac{M(M-1)}{N(N-1)}.$$

On peut encore donner une autre solution: On a M choix pour la boule k puis $M-1$ choix pour la boule m. Une fois ces deux boules choisies, il s'agit de compter le nombre de choix ordonnés de $n-2$ éléments pris parmi $N-2$, donc

$$\text{card}(A_k \cap A_m) = M(M-1)A_{N-2}^{n-2}$$

puis

$$\mathbb{P}(A_k \cap A_m) = M(M-1)\frac{A_{N-2}^{n-2}}{A_N^n}.$$

Exercice 4.

1. On peut choisir au moins deux espaces probabilisés :

   - Un premier choix :

     $$\Omega_1 = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n),\ a_i \in \{1, \cdots, 20\},\ a_i \neq a_i \text{ si } i \neq j\}.$$

     L'ensemble Ω_1 étant fini, on choisit $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega_1)$. On munit $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ de la probabilité uniforme :

     $$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega_1),\ \mathbb{P}_1(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega_1)} = \frac{\text{card}(A)}{A_{20}^n} = \frac{(20-n)!}{20!}\text{card}(A).$$

   - Un autre choix possible est

     $$\Omega_2 = \{E \subset \{1, \ldots, 20\},\ \text{card}(E) = n\}.$$

     L'ensemble Ω_2 étant fini, on choisit $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega_2)$. On munit $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ de la probabilité uniforme :

     $$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega_2),\ \mathbb{P}_2(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega_2)} = \frac{\text{card}(A)}{\binom{20}{n}} = \frac{n!(20-n)!}{20!}\text{card}(A).$$

2. Si on travaille avec l'espace probabilisé Ω_2, l'événement $\{X = 8\}$ est égal à l'ensemble des parties à trois éléments de $\{8, \ldots, 20\}$ qui contiennent 8, c'est-à-dire des parties de la forme $\{8, a, b\}$, avec $9 \leq a < b \leq 20$. Son cardinal est donc égal au nombre de parties à deux éléments de $\{9, \ldots, 20\}$, c'est-à-dire $\binom{12}{2}$. On a donc

$$\mathbb{P}_2(X = 8) = \frac{\binom{12}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{66}{1140} = \frac{11}{190} \simeq 0.058.$$

L'événement $\{X \geq 8\}$ est égal à l'ensemble des parties de $\{8, \ldots, 20\}$ qui a pour cardinal $\binom{13}{3}$, et on a

$$\mathbb{P}(X \geq 8) = \frac{\binom{13}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{286}{1140} \simeq 0.25.$$

3. En généralisant le raisonnement fait à la question précédente, on obtient :

$$\operatorname{card}(\{X = k\}) = \begin{cases} \binom{20-k}{n-1} & \text{si } 20 - k + 1 \geq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$\operatorname{card}(\{X \geq k\}) = \begin{cases} \binom{20-k+1}{n} & \text{si } 20 - k + 1 \geq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} \frac{\binom{20-k}{n-1}}{\binom{20}{n}} & \text{si } 20 - k + 1 \geq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \begin{cases} \frac{\binom{20-k+1}{n}}{\binom{20}{n}} & \text{si } 20 - k + 1 \geq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 5.

1. Il suffit d'écrire les équivalences suivantes :

$$\left(\mathbf{1}_{\bigcap_{k=1}^n A_k}(\omega) = 1\right) \Leftrightarrow \left(\omega \in \bigcap_{k=1}^n A_k\right) \Leftrightarrow (\forall k,\ \omega \in A_k) \Leftrightarrow (\forall k,\ \mathbf{1}_{A_k}(\omega) = 1)$$
$$\Leftrightarrow \left(\prod_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}(\omega) = 1\right).$$

2. On écrit, en utilisant la relation $\mathbf{1}_A = 1 - \mathbf{1}_{A^c}$ et la relation de la question 1 :

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \mathbf{1}_{(\bigcap_{k=1}^n A_k^c)^c} = 1 - \mathbf{1}_{\bigcap_{k=1}^n A_k^c} = 1 - \prod_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k^c} = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{1}_{A_k}).$$

3. Il suffit de développer le dernier terme de l'identité établie en 2, c'est à dire :

$$\prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{1}_{A_k}) = 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}}.$$

La formule demandée vient alors de l'égalité établie en 2 et de la linéarité de l'espérance, en remarquant que que $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$ pour tout événement A.

4. On numérote les factures et les boîtes aux lettres de 1 à n. Soit A_k l'évènement

$$A_k = \{\text{la facture } k \text{ est dans la boîte aux lettres } k\}.$$

On cherche la probabilité de l'évènement $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Pour utiliser 3, il faut déterminer p_k. Soit $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. L'espace Ω est l'ensemble des configurations de n factures réparties dans n boîtes aux lettres. On a $\text{card}(\Omega) = n!$. L'évènement $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ est l'ensemble des configurations telles que la facture i_j est dans la boîte aux lettres i_j, pour $j = 1 \ldots k$. Comptons son cardinal. Pour chaque $j = 1 \ldots k$, on a un seul choix pour la boîte aux lettres i_j. Il reste ensuite à répartir $n - k$ factures dans $n - k$ boîtes aux lettres, ce qui donne $(n - k)!$ configurations possibles. Donc

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

D'où

$$p_k = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \binom{n}{k}(n-k)!/n! = 1/k!,$$

et $p(n) = \mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}/k!$, d'après la question précédente. Il découle du développement en série de l'exponentielle que la limite de $p(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ est $1 - 1/e$.

Exercice 6.

On peut représenter cette expérience à l'aide de l'espace probabilisé suivant :

$$\Omega = \{(a_1, \cdots, a_{10}),\ a_i \in \{1,2,3\},\ i \in \{1, \cdots, 10\}\} = \{1,2,3\}^{10}.$$

Son cardinal est 3^{10}. Pour $k \in \{0, \cdots, 10\}$, le cardinal de l'événement $\{X = k\}$ est $\binom{10}{10-k} = \binom{10}{k}$ (nombre de manières de choisir $10-k$ mauvaises réponses), multiplié par 2^{10-k} (2 choix possible à chaque fois). La loi de X est donc donnée par :

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, 10\},\ \mathbb{P}(X = k) = \binom{10}{k}\frac{2^{10-k}}{3^{10}} = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}.$$

X suit une loi binomiale de paramètres 10 et 1/3, notée $\mathcal{B}(10, 1/3)$. Une autre manière de déterminer la loi de X est d'exprimer cette variable aléatoire comme la somme de 10 variable aléatoire indépendantes prenant la valeur 0 avec probabilité 2/3 et la valeur 1 avec probabilité 1/3 : X est le nombre de succès obtenus après 10 épreuves de Bernoulli indépendantes, où la probabilité de succès est 1/3. Il est connu alors que X suit une loi $\mathcal{B}(10, 1/3)$.

Exercice 7.

On définit les évènements

$$\begin{aligned} S_i &= \{\text{tirer le sac } S_i\},\ (i \in \{1,2,3\}) \\ A &= \{\text{tirer une pièce d'or}\}, \\ B &= \{\text{tirer une pièce ordinaire}\}. \end{aligned}$$

1. Soit Ω l'espace probabilisé, alors $\Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap (S_1 \cup S_2 \cup S_3)) &= \mathbb{P}(A \cap S_1) + \mathbb{P}(A \cap S_2) + \mathbb{P}(A \cap S_3) \\ &= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. La probabilité que l'on cherche est $P(S_1 \mid A)$. Il est évident que $\mathbb{P}(A \mid S_1) = 1$, d'où :

$$\mathbb{P}(S_1 \mid A) = \mathbb{P}(A \mid S_1)\frac{\mathbb{P}(S_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{2}{3}.$$

Exercice 8.
On définit

$$A = \{\text{le document se trouve dans le septième tiroir}\}$$
$$B = \{\text{le document se trouve dans l'un des six premiers tiroirs}\}.$$

La probabilité que l'on cherche est $\mathbb{P}(A \mid B^c)$. D'une part, $\mathbb{P}(A) = p/7$, $\mathbb{P}(B) = 6p/7$ et d'autre part A est inclus dans B^c donc

$$\mathbb{P}(A \mid B^c) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B^c)}{\mathbb{P}(B^c)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{1 - \mathbb{P}(B)} = \frac{p}{7 - 6p}.$$

Exercice 9.
L'événement $\{X = Y\}$ se décompose de la manière suivante :

$$\{X = Y\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{X = k, Y = k\}.$$

De plus les événements $\{X = k, Y = k\}$, $k = 1, \cdots, n$ sont disjoints et pour tout k, $\{X = k\}$ et $\{Y = k\}$ sont indépendants. On a donc :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

L'espace probabilisé Ω se décompose ainsi : $\Omega = \{X > Y\} \cup \{X < Y\} \cup \{X = Y\}$. Par symétrie, on a $\mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{P}(X < Y)$, d'où l'équation : $2\mathbb{P}(X > Y) + \mathbb{P}(X = Y) = 1$. On en déduit que $\mathbb{P}(X > Y) = (n-1)/2n$ et $\mathbb{P}(X \geq Y) = \mathbb{P}(X > Y) + \mathbb{P}(X = Y) = 1/2 + 1/2n$. On aurait pu aussi calculer cette probabilité directement :

$$\mathbb{P}(X \geq Y) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y = i, X \geq i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y = i, X \geq i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y = i)\mathbb{P}(X \geq i)$$

par l'indépendance de X et Y. On calcule que $\mathbb{P}(X \geq i) = \sum_{j=i}^{n} \mathbb{P}(X = j) = \frac{n-i+1}{n}$. On obtient donc (en utilisant aussi $\mathbb{P}(Y = i) = 1/n$)

$$\mathbb{P}(X \geq Y) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y = i)\mathbb{P}(X \geq i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i+1}{n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

$X - Y$ est une variable aléatoire symétrique à valeurs dans l'ensemble

$$\{-(n-1), -(n-2), \cdots, -1, 0, 1, \cdots, (n-2), (n-1)\}.$$

Pour déterminer sa loi, il suffit de calculer $\mathbb{P}(X - Y = k)$, pour $k = 0, 1, \cdots, n-1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X - Y = k) &= \sum_{i=1}^{n-k} \mathbb{P}(X = k + i, Y = i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-k} \mathbb{P}(X = k + i)\mathbb{P}(Y = i) \\ &= \frac{n-k}{n^2}, \end{aligned}$$

où la seconde égalité vient de l'indépendance entre X et Y.

Exercice 10.

1. Calculons $\mathbb{P}(X = k)$. Il y a $\binom{1000}{k}$ façons de pêcher k poissons parmi tous les poissons marqués. Puis il y a $\binom{N-1000}{1000-k}$ façons de pêcher les autres. De plus il y a $\binom{N}{1000}$ façons de pêcher 1000 poissons dans le lac. La loi de X est alors donnée par :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{1000}{k}\binom{N-1000}{1000-k}}{\binom{N}{1000}}, \quad k = 0, 1, \cdots, 1000\,.$$

   X suit une loi hypergéométrique de paramètres N et 1000.

2. On obtient facilement l'égalité

$$\frac{\mathbb{P}(X = k+1)}{\mathbb{P}(X = k)} = \frac{(1000-k)^2}{(k+1)(N-2000+k+1)}\,.$$

   Ce quotient est décroissant en $k \in \{0, ..., 1000\}$. On obtient alors l'équivalence

$$\frac{\mathbb{P}(X = 11)}{\mathbb{P}(X = 10)} \leq 1 \leq \frac{\mathbb{P}(X = 10)}{\mathbb{P}(X = 9)} \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = 10) \geq \mathbb{P}(X = k) \quad \forall k.$$

   De plus $\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)}$ est décroissant en N. En résolvant $(1000-9)^2 = (9+1)(x-2000+9+1)$ on obtient $x = 100199, 1$, puis $N = 100200$.