Université Pierre et Marie Curie Probabilités
Année 2014-2015 LM390

Série d'exercices n°2

Exercice 1. *(Absence de mémoire pour la loi géométrique)*
Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que pour tous entiers n et p, on a $\mathbb{P}(T \geq n) > 0$ et $\mathbb{P}(T \geq n+p \,|\, T \geq n) = \mathbb{P}(T \geq p)$. Montrer que T suit une loi géométrique.

Exercice 2.
Sur un espace de probabilité Ω on se donne une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p, $(0 < p < 1)$, indépendantes.

1. Soit $A_n = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \neq X_{n-1}(\omega)\}$, $n \geq 2$. Calculer $\mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1})$ pour $n \geq 2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les A_n soient indépendants.
2. Soit $\nu(\omega) = \inf\{n \geq 2 : \omega \in A_n\}$, avec $\inf \emptyset = +\infty$. Montrer que ν est une variable aléatoire. Quelle est la loi de ν ? Montrer que $\mathbb{P}(\nu = +\infty) = 0$.

Exercice 3. *(Indépendance et indépendance deux à deux)*
On suppose données, sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ deux variables de Bernoulli ε_1 et ε_2, indépendantes, à valeurs dans $\{-1, +1\}$ avec

$$\mathbb{P}(\varepsilon_i = +1) = p,\ \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = 1 - p,\ (i = 1,\ 2).$$

1. Trouver p pour que la variable aléatoire $\varepsilon_1\varepsilon_2$ soit indépendante d'une part de ε_1, et d'autre part de ε_2.
2. Trouver p pour que la variable aléatoire $\varepsilon_1\varepsilon_2$ soit indépendante du couple $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Exercice 4.
Soient X, Y et Z trois variables aléatoires discrètes. Vrai ou faux ? (si vrai le prouver, si faux donner un contre exemple) :

1. Si X et Y sont indépendantes, et si X et Z sont indépendantes, alors X est indépendante de (Y, Z).
2. Si (X, Y) et Z sont indépendantes, alors Y est indépendante de Z et X est indépendante de Z.
3. Si X et Y sont indépendantes et (X, Y) est indépendante de Z, alors X est indépendante de (Y, Z).

Exercice 5.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramtre $p \in]0, 1[$. On pose

$$Y_n := X_nX_{n+1},\ S_n := X_1 + \cdots + X_n,\ V_n := Y_1 + \cdots + Y_n.$$

1. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$, $\mathbb{E}(V_n)$.
2. Calculer $\mathrm{Var}(S_n)$, $\mathrm{Var}(V_n)$ et $\mathrm{Cov}(S_n, V_n)$.

Exercice 6. *(Loi multinomiale)*
On considère n variables indépendantes $X_1, \cdots, X_n$ à valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, \cdots, r\}$ et de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_1 = i) = p_i$, $1 \leq i \leq r$. On définit $Z_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_j = i\}}$.

1. Déterminer la loi de Z_1. A quelle condition les variables aléatoires Z_i ont-elles même loi ?
2. Calculer la covariance de Z_1 et Z_2. Ces variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 7.
Soient n et N des entiers supérieurs ou égaux à 2 et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et distribuées uniformément sur l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$, (i.e. $\mathbb{P}(X_i = k) = 1/N$ pour $k = 1, 2, \ldots, N$). On désigne par U_n leur minimum et par V_n leur maximum.

1. Calculer la loi de V_n.
2. Calculer la loi jointe de U_n et V_n puis $\mathbb{P}(U_n = V_n)$.
3. Calculer la probabilité pour que $X_1 = j$ et $X_2 = k$ sachant que $U_n = r$.
4. Trouver un équivalent lorsque N tend vers $+\infty$ (n fixé) de $\mathbb{E}(V_n)$ et $\mathrm{Var}(V_n)$.

Exercice 8.
Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que les (X_n) prennent des valeurs strictement positives. On pose $\mathbb{E}(X_k) = a$, $\mathbb{E}(X_k^{-1}) = b$, ($a < +\infty$ et $b < +\infty$) et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que $\mathbb{E}(S_n^{-1})$ est fini et que $\mathbb{E}(X_k S_n^{-1}) = n^{-1}$, pour $k = 1, \cdots, n$. Calculer $\mathbb{E}(S_m S_n^{-1})$, $n, m \geq 1$.

Exercice 9.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, $(0 < p < 1)$ et Y suit une loi de Poisson de paramètre λ, $\lambda > 0$. Soit Z la variable aléatoire égale à 0 si $X = 0$ et à Y si $X = 1$.

1. Calculer la loi de Z.
2. Quelle est la fonction génératrice de Z, son espérance et sa variance ?
3. Que vaut la probabilité conditionnelle de $X = 0$, respectivement, $X = 1$, sachant que $Z = 0$?

Exercice 10.
Une secrétaire donne n appels téléphoniques ($n \geq 1$ est fixé). A chacun de ces appels, la probabilité qu'elle parvienne à joindre son correspondant est p ($p \in]0, 1[$ est fixé). On suppose que les résultats de tous ces appels sont indépendants. Après cette première série d'essais, elle tente, le lendemain de rappeler les correspondants qu'elle n'a pas réussi à joindre. Les hypothèses sur ses chances de réussite sont les mêmes. On note X le nombre de personnes jointes dès le premier jour et Y le nombre de personnes jointes l'un ou l'autre jour.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Pour $h \leq k \leq n$, que vaut $\mathbb{P}(Y = k | X = h)$?
3. En déduire la loi de Y. Retrouver ce résultat par un argument direct.

Exercice 11.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$. On note $\mathcal{B}(n, p)$ la loi binomiale de paramètres n et p, (pour $n = 0$ c'est la loi de la variable aléatoire identiquement nulle). Soit un entier $M \geq 1$, un réel $a \in]0, 1[$ et U, V des variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1, \cdots, M\}$ telles que :

1. La loi de U sachant $V = r$ est identique à celle de $r + W$ où W suit une loi $\mathcal{B}(M - r, p)$.

2. V suit une loi $\mathcal{B}(M, a)$

Prouver, en utilisant les fonctions génératrices puis par un calcul direct, que U suit une loi $\mathcal{B}(M, 1 - bq)$, avec $b = 1 - a$ et $q = 1 - p$.

Exercice 12.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et ν une variable aléatoire à valeurs entières indépendante de la suite (X_n). On définit S_ν sur Ω par $S_\nu(\omega) = 0$ si $\nu(\omega) = 0$ et $S_\nu(\omega) = \sum_{n=1}^{\nu(\omega)} X_n(\omega)$ si $\nu(\omega) \geq 1$.

1. Montrer que S_ν est une variable aléatoire.

2. On suppose que les X_n sont à valeurs entières et ont même loi. Déterminer la fonction génératrice de S_ν en fonction de celle de ν et de X_1.

3. En déduire l'espérance et la variance de S_ν.
   4) Trouver la loi de S_ν lorsque les X_n suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ et que ν suit une loi géométrique de paramètre $a \in]0, 1[$.

Exercice 13.
Une truite pond des oeufs au fond du torrent. Leur nombre N suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Chaque oeuf survit avec une probabilité $p \in]0, 1[$, indépendamment des autres.

1. Soit M le nombre d'oeufs qui survivent. Donner la loi conjointe du couple (N, M). Donner la loi marginale et l'espérance de M.

2. M et $N - M$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 14.

1. Rappeler l'inégalité de Markov.

2. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3. Soit Z une variable aléatoire réelle, de carré intégrable. Montrer que pour tout évènement B,
$$\mathbb{E}[|Z|\mathbf{1}_B] \leq \mathbb{E}[Z^2]^{1/2}\mathbb{P}(B)^{1/2}.$$

Exercice 15.
Soit Φ une fonction borélienne, strictement positive définie sur $]0, +\infty[$ et croissante. On suppose que $E(\Phi(|X|)) = M < +\infty$, où X est une variable aléatoire réelle presque sûrement non nulle. Montrer que
$$\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq \frac{M}{\Phi(t)}\,.$$

Exercice 16. *(Inégalité de Paley-Zygmund)*
Soit Z une variable aléatoire réelle positive telle que $\mathbb{P}(Z > 0) > 0$. Montrer que pour tout $\theta \in [0, 1]$,
$$\mathbb{P}(Z \geq \theta\mathbb{E}[Z]) \geq (1 - \theta)^2 \frac{\mathbb{E}[Z]^2}{\mathbb{E}[Z^2]}.$$

Exercice 17.
Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \cdots$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\mathbb{P}(\varepsilon_n = +1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = 1/2\,.$$

1. Calculer en fonction de n la quantité :

$$\mathbb{E}((\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n)^2)\,.$$

2. Soit $a \in]0,1[$, fixé. Montrer l'inégalité :

$$\mathbb{P}(|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n| \geq an) \leq \frac{1}{a^2 n}\,. \tag{1}$$

3. Montrer que pour $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(|\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n| \geq an) = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{l} \mathbf{1}_{|2l-n| \geq an}.$$

4. Déduire de 2) et de 3) que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \left(\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \mathbf{1}_{\{|2l-n| \geq an\}} \right) = 0\,.$$

5. Soit N une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\theta > 0$, indépendante de la suite $(\varepsilon_n, n \geq 1)$. Calculer

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{n=1}^{N+1} \varepsilon_n \right)^2 \right]$$

en fonction de θ.

Exercice 18.
Soit $(Z_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par : $\mathbb{P}(Z_i = -1) = \mathbb{P}(Z_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(Z_i = 0) = 1 - 2p$ où p est tel que $0 < p < 1/2$.

1. On définit pour tout entier $i \geq 1$: $U_i = Z_i + Z_{i+1}$.
   (a) Déterminer la loi de U_i. Pour quels couples (i,j) les variables aléatoires U_i et U_j sont-elles indépendantes ?
   (b) Calculer pour $n \geq 2$, $\mathrm{Var}(Z_1 + 2\sum_{i=2}^{n} Z_i + Z_{n+1})$.
   (c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{n} U_i \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

2. Déterminer pour tout $i \geq 1$ la loi de X_i où $X_i = |Z_i|$. Les variables aléatoires $(X_i)_{i \geq 1}$ sont-elles indépendantes ?

3. On définit pour tout entier $n \geq 1$: $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
   (a) Déterminer la loi de S_n.
   (b) Déterminer la loi conditionnelle de S_n sachant $\{S_k = i\}$, $(k \neq n)$. On distinguera deux cas suivant que $n > k$ ou $n < k$.