Université Pierre et Marie Curie Probabilités
Année 2014-2015 LM390

Série d'exercices n°3

Exercice 1.
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \leq 0 \\ 1 - e^{-x/2}\left(1 + \frac{x}{2}\right) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Montrer que F est la fonction de répartition d'une loi de probabilité dont on déterminera la densité si elle existe.

Exercice 2.
Soit X une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$ (de densité de probabilité $f(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$). Déterminer la fonction de répartition de la v.a. $Y = \min(X, a)$, $(a \in [0, 1])$. Montrer que la loi de Y est une combinaison linéaire d'une loi à densité et d'une mesure de Dirac.

Exercice 3.
Soit X une v.a. réelle de fonction de répartition F. Trouver en fonction de F les fonctions de répartition de X^2, X^3, $aX + b$, $(a, b \in \mathbb{R})$, $[X]$, $X - [X]$, (où $[X]$ est la partie entière de X) et $\exp(X)$.

Exercice 4.
Montrer qu'une v.a. X est indépendante d'elle-même si et seulement si elle est p.s. constante :

- en la supposant de carré intégrable et en calculant $\mathrm{Var}\,(X)$,
- plus généralement en déterminant sa fonction de répartition.

Exercice 5.
Soient X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer les loi des v.a. $U = \min(X_1, X_2)$ et $V = \max(X_1, X_2)$. En déduire les densités de probabilité correspondantes. Que vaut $\mathbb{E}(|X_1 - X_2|)$?

Exercice 6.
Soit L une v.a. positive admettant une densité de probabilité f et X une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$, indépendante de L. On définit deux v.a. L_1 et L_2 par $L_1 = XL$ et $L_2 = (1 - X)L$, (cela modélise par exemple la rupture d'une chaîne moléculaire de longueur initiale aléatoire L).

1. Déterminer la loi du couple (L_1, L_2) ainsi que les lois de L_1 et L_2.
2. Que peut-on dire du couple (L_1, L_2) lorsque $f(x) = \lambda^2 x \exp(-\lambda x)\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$, $(\lambda > 0)$?
3. Déterminer la loi de $Z = \min(L_1, L_2)$ dans ce cas.

Exercice 7.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et Y une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, où σ désigne un réel positif.

1. Écrire la densité de la loi du couple (X, Y).

2. On pose $U = Y/X$. Calculer la densité de la loi du couple (X, U).

3. Les variables X et U sont-elles indépendantes ?

Exercice 8.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. X suit une loi uniforme sur [0,1] et Y une loi exponentielle de paramètre 1. Calculer la loi de $\frac{Y}{X}$.

Exercice 9.
Soit (X_1, X_2) un couple de v.a. admettant la densité de probabilité :

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)\right),$$

où $\rho \in [0, 1[$.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$ et trouver les densités marginales de X_1 et X_2. A quelle condition les v.a. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

2. On pose $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ et $\Phi \in [0, 2\pi[$ définie par

$$\cos\Phi = \frac{X_1}{R} \quad \text{et} \quad \sin\Phi = \frac{X_2}{R}.$$

Déterminer la densité du couple (R, Φ) puis celle de Φ.

Exercice 10.
On appelle variable gamma de paramètre $a > 0$ une variable à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ dont la loi admet la densité : $e^{-t}t^{a-1}/\Gamma(a)$.

1. Soit Z_a une v.a. gamma de paramètre a. Calculer explicitement les moments entiers : $\mathbb{E}((Z_a)^n)$, en fonction de a et de $n \in \mathbb{N}$.

2. Soient Z_a et Z_b deux variables gamma indépendantes de paramètres respectifs a et b. Montrer que les variables $Z_a/(Z_a + Z_b)$ et $Z_a + Z_b$ sont indépendantes et expliciter la loi de $Z_a/(Z_a + Z_b)$.

Exercice 11.
Soient X et Y deux v.a.r. uniformément bornées.

1. Montrer l'identité :

$$\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \, [\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y)]. \quad (1)$$

Indication : Pour deux réels M et N suffisamment grands, on pourra considérer les quantités :

$$\mathbb{E}[(M - X)(N - Y)] \quad \text{et} \quad (M - \mathbb{E}[X])(N - \mathbb{E}[Y])$$

et utiliser l'égalité $M - X = \int_X^M dx$, si $X \leq M$, $\mathbb{P}$-p.s.

2. Calculer séparément les deux membres de (1) lorsque $X \equiv Y$ est une variable uniforme sur $[0, a]$, et vérifier l'égalité (1) dans ce cas.

Exercice 12.

1. Montrer, pour tout couple (X, Y) de variables aléatoires, l'inégalité :

$$\mathbb{E}(|XY|) \leq \left(\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)\right)^{1/2}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Montrer qu'il existe un entier p_n ne dépendant que de n, tel que la propriété suivante soit satisfaite : *pour tout n-uplet de variables aléatoires $(X_1, \cdots, X_n)$, si pour tout $k \leq n$, $\mathbb{E}(|X_k|^{p_n}) < \infty$, alors : $\mathbb{E}(|X_1 X_2 \cdots X_n|) < \infty$.*

3. Soient G_1, G_2, $\cdots$, G_n, n variables aléatoires telles que, pour tout k, G_k soit une variable gaussienne centrée de variance σ_k.

   Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$, dépendant de n, et des réels σ_k^2, $k = 1, 2, \cdots, n$, tel que :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\varepsilon \sum_{k=1}^{n} G_k^2\right)\right] < \infty.$$

Exercice 13.
Soit h une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ et g une fonction réelle sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x on ait $0 < g(x) < 1$. On engendre une suite (Y_n, U_n), $n = 1, 2, \cdots$ de couples indépendants de variables aléatoires réelles, tels que pour tout $n \geq 1$, Y_n et U_n sont indépendantes. Les Y_n ont la même loi de densité h et les U_n suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$. Soit τ le premier instant où $U_n \leq g(Y_n)$, c'est à dire : $\tau = \inf\{n \geq 1 : U_n \leq g(Y_n)\}$ en posant $\tau = +\infty$ au cas où $U_n > g(Y_n)$, pour tout n.

1. Exprimer $\rho = \mathbb{P}(U_n \leq g(Y_n))$ à l'aide de h et de g. Quelle est la loi de τ en fonction de ρ ? Montrer que $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$.

2. On prend pour X la variable aléatoire $X = Y_\tau$, (i.e. $X = Y_n$ pour $\tau = n$). Quelle est la loi de X ?

Exercice 14.
Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des v.a. indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda > 0$. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $k = 1, 2, \cdots, n$, $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$.

1. Calculer la loi de $(S_1, \cdots, S_n)$.

2. Montrer que $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ admet la densité de probabilité

$$f_n(t) = \lambda^n e^{-\lambda t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t).$$

3. Que vaut la fonction caractéristique de S_n ?

4. Calculer de deux manières $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathrm{Var}(S_n)$.

Exercice 15.
On dit qu'une v.a. X suit une loi stable si pour tout entier $n \geq 1$ et toutes v.a. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ indépendantes et de même loi que X, il existe des constantes $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ telles que $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ait même loi que $a_n X + b_n$.

1. Montrer que les lois gaussiennes centrées $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, de paramètre quelconque $\sigma > 0$, et les lois de Cauchy de paramètre quelconque $c > 0$ sont stables. Montrer que par contre les lois de Poisson ne le sont pas.

2. Calculer a_n et b_n lorsque X suit une loi stable de variance finie σ^2. En déduire que les seules lois stables de variance finie sont les lois gaussiennes.

Exercice 16.
Soit $Z = (X, Y)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de fonction caractéristique Φ.

1. Montrer que la loi de Z est invariante par rotation si et seulement si il existe une fonction ψ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $\Phi(u, v) = \psi(u^2 + v^2)$.

2. On suppose que Z vérifie les conditions du 1) et aussi que X et Y sont indépendantes. On note Φ_X et Φ_Y les fonctions caractéristiques de X et de Y.

   (a) Exprimer Φ en fonction de Φ_X et Φ_Y, puis exprimer Φ_X et Φ_Y en fonction de ψ. Vérifier que Φ_X et Φ_Y sont paires et qu'elles prennent donc des valeurs dans $\mathbb{R}$.

   (b) Déduire du a) une relation vérifiée par ψ puis montrer que ψ ne peut s'annuler.

   (c) Montrer que X (et de même Y) suit une loi normale centrée de variance 2λ où $\lambda = -\log \psi(1)$.

   (d) Si $X = R \cos \Theta$ et $Y = R \sin \Theta$, avec $R > 0$ et $0 \leq \Theta < 2\pi$. Quelles sont les lois de Θ et de R ? Sont-elles indépendantes ?