Université Pierre et Marie Curie Probabilités
Année 2014-2015 LM390

Série d'exercices n°5

Exercice 1.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, telle que X_n suive la loi $\frac{1}{n}\delta_1 + (1-\frac{1}{n})\delta_0$. Étudier les différents modes de convergence de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 2.
Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires, telle que Y_n suit la loi $\frac{1}{n}\delta_{n^2} + (1-\frac{1}{n})\delta_0$. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0, mais pas en norme L^p.

Exercice 3.
Soit X une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$\begin{aligned} Y_n(\omega) &= n \quad \text{si} \quad 0 \leq X(\omega) \leq 1/n \\ Y_n(\omega) &= 0 \quad \text{si} \quad X(\omega) > 1/n\,. \end{aligned}$$

1. La suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle presque surement ?
2. La suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle en loi ?
3. La suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle dans L^1 ?

Exercice 4.
On définit la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ par

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{n} \quad \text{si} \quad X_n \leq \frac{1}{n}\,, \\ T_n &= 1 \quad \text{si} \quad X_n > \frac{1}{n}\,, \end{aligned}$$

où $(X_n)_n$ est une suite de v.a indṕendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Montrer que la suite (T_n) converge en probabilité et trouver sa limite.
2. Vérifier que la série de probabilités

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|T_{n^2} - 1| > \varepsilon)\,,$$

   est convergente pour tout $\varepsilon > 0$. En déduire la convergence presque sure de la suite (T_{n^2}).

Exercice 5.
Considérons une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a. telle que X_n suive une loi exponentielle de paramètre λ_n. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Soit $Z_n = X_n - [X_n]$, où $[x]$ désigne la partie entière du réel x. Montrer que Z_n converge en loi. Préciser sa limite.

Exercice 6.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs entières telle que pour tout n, X_n suit la loi :

$$P(X_n = k) = \frac{\alpha}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{k-1}\,, \quad k \geq 1\,,$$

($\alpha \in \mathbb{N}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n > \alpha$). Montrer que $(X_n/n)_{n\geq 1}$ converge en loi. Préciser sa limite.

Exercice 7.
Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, et de même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose, pour tout $n \geq 1$, $X_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 1.

Exercice 8.
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi de fonction caractéristique Φ. Posons $Y_n = (-1)^n X_n$.

1. Quelle est la fonction caractéristique de Y_n ? Quelle condition faut-il imposer à la loi de (X_n) pour que (Y_n) converge en loi ?

2. Quelle condition faut-il imposer à la loi de (X_n) pour que (Y_n) converge en probabilité ?

Exercice 9.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{array}{rcl} f_n(x) & = & 1 - \cos 2n\pi x\,, \quad \text{si} \quad x \in]0,1[\\ f_n(x) & = & 0\,, \quad \text{sinon.} \end{array}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit X_n, une v.a. de densité f_n. Montrer que la suite (X_n) converge en loi bien que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas.

Exercice 10.
Soient X_n, $n \geq 1$ des v.a. de fonction de répartition F_n.

1. On suppose que $P(X_n = 1/n) = 1$. (X_n) converge-t-elle ? En quel sens ? Préciser sa limite. $F_n(x)$ converge-t-elle vers $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{N}$?

2. On suppose que $X_n = n$, p.s. F_n tend-elle vers une fonction de répartition ?

Exercice 11.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, X_n ayant pour fonction de répartition la fonction F_n définie par

$$F_n(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \qquad \text{et} \qquad F_n(x) = 1 - \frac{1}{x+n} \text{ si } x > 0.$$

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, et $Y_n = \frac{S_n}{n}$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0, mais pas la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 12.
On considère une suite de v.a. indépendantes et de même loi : $(X_n)_{n\geq 0}$. On définit alors la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ par

$$Y_0 = \frac{X_0}{2};\ Y_1 = \frac{X_1 + Y_0}{2};\ Y_2 = \frac{X_2 + Y_1}{2}; \cdots ; Y_n = \frac{X_n + Y_{n-1}}{2}; \cdots .$$

1. Calculer la fonction caractéristique ϕ_n de Y_n en fonction de ϕ, la fonction caractéristique de X_1, et de n.

2. On suppose que la loi commune aux variables X_n est la loi normale centrée $\mathcal{N}(0, \sigma)$. Quelle est la loi de Y_n ? Quelle est la loi limite de (Y_n) lorsque n tend vers l'infini ?

3. Si les variables X_n suivent la loi de Cauchy de densité $[\pi(1+x^2)]^{-1}$, $x \in \mathbb{N}$, montrer que (Y_n) converge en loi lorsque n tend vers l'infini. Préciser la limite.

Exercice 13.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, de même loi, centrées, de variance σ^2, de fonction caractéristique Φ. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On définit aussi la suite $(N_k)_{k\geq 1}$ de v.a. indépendantes telle que pour tout k, N_k est une v.a. de Poisson de paramètre k. On suppose de plus que la suite (N_k) est indépendante de la suite (X_n). Pour tout $k \geq 1$, on pose

$$\begin{aligned} Z_k &= \frac{1}{\sqrt{N_k}} S_{N_k} \quad \text{si} \quad N_k \neq 0\,, \\ Z_k &= X_1 \quad \text{si} \quad N_k = 0\,. \end{aligned}$$

1. Exprimer la fonction caractéristique Φ_k de Z_k en fonction de Φ. Qu'advient-il si X_1 est une gaussienne ?

2. Montrer que pour tout réel t, $\Phi^n(t/\sqrt{n}) \to \exp -\sigma^2 t^2/2$, lorsque $n \to \infty$. En déduire que (Z_k) converge en loi vers une v.a. que l'on précisera.

Exercice 14.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_{2n+1} - X_{2n}$. Montrer que la suite

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \cdots + Y_n)\,,$$

converge en loi et trouver la loi limite.

2. On définit maintenant la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ par $Z_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/n}$. La suite (Z_n) converge-t-elle ? En quel sens ? Préciser sa limite.

Exercice 15.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Quelle est la loi de $X_1 + \cdots + X_n$? Que vaut $P(X_1 + \cdots + X_n \leq n)$?

2. Utiliser le théorème central limite pour montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}\,.$$

Exercice 16.
Soit $b > 0$, et soit $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ une suite de variables indépendantes, de loi commune la loi gamma de paramètre b.
On pose : $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

1. Montrer que $\frac{S_n}{n}$ converge presque surement, lorsque $n \to \infty$, vers un réel c que l'on calculera.

2. Montrer que : $\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - c\right)$ converge en loi, vers une loi limite que l'on identifiera.

3. Montrer que : $n\left(\frac{S_n}{n} - c\right)^2$ converge en loi, vers une loi limite que l'on identifiera.

4. Montrer que : $\sqrt{n}\left(\left(\frac{S_n}{n}\right)^2 - c^2\right)$ converge en loi, vers une loi limite que l'on identifiera. Plus généralement, si $f \; : \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{N}_+$ est une fonction de classe C^1, montrer que : $\sqrt{n}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(c)\right)$ converge en loi, vers une loi limite que l'on identifiera.