Série d'exercices N°6
Divers et variés

I. Statistiques d'ordre

Exercice 1. Soient $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. (indépendantes identiquement distribuées). On suppose que X_1 a une fonction de répartition continue. Calculer $\mathbb{P}(X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_n)$.

Dans les exercices suivants, les statistiques d'ordre $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ désignent les variables $X_1, \ldots, X_n$ arrangées par ordre croissant.

Exercice 2
Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables i.i.d admettant une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. Quelle est la densité de $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$?

Exercice 3
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, et pour $t > 0$, $N(t) = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}}$.
1) Donner la loi de $(S_1, \ldots, S_n)$ puis de S_n.
2) Montrer que la loi conditionnelle de $(S_1, \ldots, S_n)$ sachant $N(t) = n$ est la loi statistique d'ordre $(U_{(1)}, \ldots, U_{(n)})$ de n v.a. i.i.d de loi uniforme sur $[0, t]$.

Exercice 4
Soit $(X_n)_{n\geq 2}$ une suite de v.a. i.i.d de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Montrer que $(\frac{S_k}{S_n})_{1\leq k\leq n-1}$ a la loi de la statistique d'ordre $(U_{(1)}, \ldots, U_{(n-1)})$ de $n-1$ v.a. i.i.d de loi uniforme sur $[0, 1]$.

II. Loi de minimum, maximum

Exercice 5.
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une famille de variables i.i.d.. Donner la loi de $U_n = \min_{1\leq i\leq n} X_i$ et $V_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$ lorsque X_i a pour loi
1) la loi uniforme sur $[a, b]$;
2) une loi exponentielle ;
3) une loi de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 6.
Soient $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ des v.a. positives indépendantes et de même fonction de répartition F continue et telle que $F(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
1) Soit un réel $a > 0$. On pose $N := \min\{n \geq 1 \, : \, X_n > a\}$. Donner la loi de N et montrer que $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$. Calculer $\mathbb{E}[N]$.
2) Même question si on pose cette fois-ci $N := \min\{n \geq 1 \, : \, X_n > X_0\}$.
3) * On suppose dans cette question que les variables $(X_n)_{n\geq 0}$ suivent une loi exponentielle de

paramètre $\lambda > 0$ et on garde N comme dans 2). Donner la loi de $(X_0, X_N - X_0)$ et montrer que ces variables sont indépendantes.

Exercice 7. *(suite de l'exercice 6)*
Soient $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ comme dans l'exercice 6.
1) Soit $a > 0$ et $N := \min\{n \geq 1 : X_n > a\}$. Montrer que N et X_N sont indépendantes.
2) Soit maintenant $N := \min\{n \geq 1 : X_n > X_0\}$. Trouver la loi de (N, X_N). On pourra calculer $\mathbb{P}(N = n,\, X_N \leq t)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Les variables N et X_N sont-elles indépendantes? Donner la fonction de répartition de X_N.

III. Indépendance de 2 variables

Exercice 8.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, et de même loi de densité donnée par

$$f(x) = \frac{\lambda^4}{6} x^3 \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

On pose $V = X + Y$ et $W = \frac{X}{X+Y}$.
1) Montrer que f est bien une densité de probabilité.
2) Calculer la densité du couple (V, W).
3) Montrer que V et W sont indépendantes et donner leurs lois marginales.

Exercice 9.
Soient X et Y deux variables indépendantes, et de même loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On définit les variables aléatoires R sur $\mathbb{R}_+$ et Φ sur $]0, 2\pi[$ par $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ et

$$X = R\cos\Phi, \qquad Y = R\sin\Phi\,.$$

Calculer la densité du couple (R, Φ). Montrer que R et Φ sont indépendantes.

Exercice 10.
On se donne $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ i.i.d de loi uniforme sur $[0, 1]$. On note $Y := \min_{1\leq i\leq n} X_i$ et $Z := \max_{1\leq i\leq n} X_i$.
1) Donner la loi de (Y, Z).
2) Montrer que $(1 - Z, 1 - Y)$ a même loi que (Y, Z).
3) Donner la loi de $\frac{Y}{Z}$.
4) Montrer que $\frac{1-Z}{1-Y}$ est indépendant de Y.

IV. Un peu de convergence

Exercice 11.
Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires. On suppose que X_n converge en loi vers une variable aléatoire X, et Y_n converge en loi vers une variable aléatoire Y.
1) Montrer que, si $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes, alors X et Y sont indépendantes, et (X_n, Y_n) converge en loi vers (X, Y). En déduire que $X_n + Y_n$ converge en loi vers $X + Y$.

2) On prend Z une variable aléatoire symétrique ($-Z$ a la même loi que Z). On prend $X_n = Z$ et $Y_n = -Z$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que X_n et Y_n convergent en loi vers Z, mais que $X_n + Y_n$ ne converge pas en loi vers $2Z$.

Exercice 12.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $E[X_n] = 0$, et admettant un moment d'ordre 4 fini. On note $m_4 := E[(X_1)^4] < +\infty$, et $\sigma^2 = E[(X_1)^2] < +\infty$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.
1) Calculer $E[(S_n)^4]$.
2) En déduire une majoration de $P\big(|\frac{1}{n}S_n| \geq \epsilon\big)$ pour tout $\epsilon > 0$.
3) Conclure que $\frac{1}{n}S_n$ converge presque sûrement vers $0 (= E[X_1])$ quand $n \to \infty$.

Exercice 13.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
1) Soit $\lambda > 0$. Montrer que $E\big(\exp(\lambda S_n)\big) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\exp(\lambda))^n$.
2) Soient $\lambda, \varepsilon > 0$ tels que $\varepsilon < 1/2$. En appliquant l'inégalité de Markov à $\exp(\lambda S_n/n)$, vérifier que

$$P\big(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \geq \varepsilon\big) \leq \exp\Big(n\log(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{\lambda/n}) - \lambda(\frac{1}{2} + \varepsilon)\Big).$$

3) En déduire que

$$P\big(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \geq \varepsilon\big) \leq \exp(-nH(\tfrac{1}{2} + \varepsilon)),$$

où pour tout $x \in]0,1[$, $H(x) = x\log(x) + (1-x)\log(1-x)$.
3) Montrer que sur $[0,1/2[$, $x \mapsto H(x+1/2)$ est convexe, puis que pour tout $x \in [0,1/2[$, $H(\frac{1}{2}+x) \geq 2x^2$. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $P(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \geq \varepsilon) \leq \exp(-2n\varepsilon^2)$.
4) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $P(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \leq -\varepsilon) \leq \exp(-2n\varepsilon^2)$, puis que

$$P\big(|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}| \geq \varepsilon\big) \leq 2\exp(-2n\varepsilon^2).$$

5) En déduire la loi des grandes nombres pour des v.a. de Bernoulli indépendantes.
6) En passant, en utilisant $P\big(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \geq \varepsilon\big) \geq P\big(S_n = \lceil(\frac{1}{2} + \varepsilon)n\rceil\big)$, *montrer que*

$$\log P\Big(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \geq \varepsilon\Big) \overset{n\to\infty}{\sim} -nH(\tfrac{1}{2} + \varepsilon)\,.$$

Exercice 14.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi de Bernouilli de paramètre $p \in]0,1[$. On définit

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}\,.$$

1) Montrer que, presque sûrement, Y_n converge. On note Y sa limite. Montrer que Y est une variable aléatoire.
2) Si $p = 1/2$, donner la loi de Y. *Indication: utiliser la convergence de la fonction de répartition.*

Exercice 15. (partiel 2010)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes avec $E[X_n] = 0$ pour tout $n \geq 1$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. On suppose que $\sum_{n=1}^{+\infty} Var(X_n) < +\infty$.

1) Montrer que S_n converge dans L^2 vers une variable aléatoire S.

Indication: on pourra utiliser le fait que L^2 *est complet, i.e. que chaque suite de Cauchy a une limite.*

2) En déduire que $E[S] = 0$ et $Var(S - S_n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} Var(X_k)$ pour tout n.

3) Montrer que si on a de plus $\sum_{n=1}^{+\infty} nVar(X_n) < +\infty$, alors la convergence a lieu presque sûrement.