Université Pierre et Marie Curie **Année 2014-2015**

Probabilités - LM390

Série d'exercices N°7

Exercice 1. Soit (X, Y) un vecteur gaussien centré, avec $E(X^2) = 4$ et $E(Y^2) = 1$, et tel que les variables $2X + Y$ et $X - 3Y$ sont indépendantes.
1) Déterminer la matrice de covariance de (X, Y).
2) Montrer que le vecteur $(X + Y, 2X - Y)$ est également gaussien, puis déterminer sa matrice de covariance.

Exercice 2. Soit $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur gaussien. On pose $U = X + Y + Z$ et $V = X - Y$.
1) Montrer que $(U, V) \in \mathbb{R}^2$ est gaussien.
2) A quelle condition sur la matrice de covariance de (X, Y, Z) les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 3. Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur gaussien centré. On donne $E(X_1^2) = a$, $E(X_1X_2) = b$ et $E(X_2^2) = c$.
1) Calculer la matrice de covariance et la fonction caractéristique de X.
2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c) pour que cette loi possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer cette densité.

Exercice 4. Soit $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur gaussien d'espérance $(1, 1, 1)^t$ et de matrice de covariance $2I_3$. Le vecteur $(X + 2Y + Z, 2X - Y + Z + 2)$ est-il gaussien ? Déterminer sa loi.

Exercice 5. Soit $X \in \mathbb{R}^3$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) X possède-t-il une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$? Si oui donner son expression.
2) Trouver un opérateur linéaire $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tel que les composantes du vecteur $A \cdot X$ soient des variables indépendantes.
3) Déterminer la loi de $X_1 + 2X_2 - X_3$ où $X = (X_1, X_2, X_3)$.

Exercice 6. Soit $(X_1, X_2, \cdots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, I_n)$.
1) Déterminer la loi de X_1^2.
2) Déterminer les lois de $(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2)$ et de $\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}$.
3) Soit Y une v.a. telle que $(X_1, \cdots, X_n, Y)$ soit un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^{n+1}$ de loi $\mathcal{N}(0, I_{n+1})$. Déterminer la loi de la variable

$$\frac{Y}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}}.$$

Exercice 7. Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire gaussien, centré, réduit, $\mathcal{N}(0, I_n)$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on pose $Y_i = X_1 + \cdots + X_i - X_{i+1}$ (avec la convention $X_{n+1} = 0$). Les v.a. $Y_1, \cdots, Y_n$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 8. 1) Soit $a \in [-\pi/4, \pi/4]$. Déterminer le carré de la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

2) Soit Q la loi gaussienne sur $\mathbb{R}^2$, centrée, dont la matrice de covariance est

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin 2a \\ \sin 2a & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que Q est la loi image de la loi gaussiennne centrée réduite $\mathcal{N}(0, I_2)$ sur $\mathbb{R}^2$ par une application linéaire A dont on donnera la matrice.
3) Soit $Y = (Y_1, Y_2)$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ dont la loi est Q. Déterminer l'espérance de Y_1^n, où n est un entier naturel quelconque.

Exercice 9. Existe t-il un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice de covariance est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} ?$$

Exercice 10. 1) Soit (G_1, G_2) un vecteur gaussien 2-dimensionnel, centré. Montrer que :

$$E\left[\exp i(G_1 + G_2)\right] = E\left[\exp iG_1\right] E\left[\exp iG_2\right] ,$$

si et seulement si : G_1 et G_2 sont indépendantes.
2) Donner un exemple de vecteur gaussien 3-dimensionnel, centré, (G_1, G_2, G_3) tel que
$E\left[\exp i(G_1 + G_2 + G_3)\right] = \Pi_{k=1}^3 E\left[\exp i(G_k)\right]$ et les variables G_1, G_2, G_3 ne sont pas indépendantes.
3) Soit (G_1, G_2, G_3) un vecteur gaussien 3-dimensionnel centré tel que pour tout $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, on ait :

$$E\left[\exp\left(i\sum_{k=1}^{3} a_k G_k\right)\right] = \Pi_{k=1}^3 E\left[\exp(i a_k G_k)\right] .$$

Les variables G_1, G_2, G_3 sont-elles indépendantes ?

Exercice 11. Soit X un vecteur gaussien de matrice de covariance

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

Déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $X = AN$ où N est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance I_3.