

### Interrogation du 9 février 2015

Durée : 1 heure

#### Question de cours.

1. Donner la définition de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Donner la définition de la covariance de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ .

Ces notions sont elles toujours bien définies ?

2. Montrer que  $\text{Var}(X) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[(X - \lambda)^2]$ .

#### Exercice 1.

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\{0, \dots, N\}$ . Montrer les inégalités suivantes :

$$\text{Var}(X) \leq \mathbb{E} \left[ \left( X - \frac{N}{2} \right)^2 \right] \leq \frac{N^2}{4}.$$

Donner une variable aléatoire à valeurs dans  $\{0, \dots, N\}$  dont la variance atteint la borne  $\frac{N^2}{4}$ .

#### Exercice 2.

On dispose d'une urne contenant  $N$  boules numérotées de 0 à  $N$ , et on tire uniformément au hasard deux boules (distinctes) de l'urne. On note  $X$  le plus petit des numéros tirés et  $Y$  le plus grand.

1. Montrer la relation  $\sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)}{2}$ .
2. Quelle est la loi du couple  $(X, Y)$  ? (c'est-à-dire, que vaut  $\mathbb{P}(X = n, Y = m)$  pour  $(n, m)$  un élément donné de  $\{0, \dots, N\}^2$  ?)
3. Déterminer les lois respectives de  $X$  et de  $Y$ .
4. Soit  $m$  un élément fixé de  $\{0, \dots, N\}$ . Dans les cas où  $\mathbb{P}(Y = m) \neq 0$ , que vaut

$$\mathbb{P}(X = n | Y = m), \quad n \in \{0, \dots, N\} ?$$

Quelle est la loi de  $X$  quand  $Y$  est conditionnée à valoir  $m$  ? Mêmes questions pour  $\mathbb{P}(Y = m | X = n)$ .

5. Montrer que les variables aléatoires  $X$  et  $N - Y$  ont même loi. Quelles relations peut-on en déduire entre  $\mathbb{E}X$  et  $\mathbb{E}Y$  ? Entre  $\text{Var}(X)$  et  $\text{Var}(Y)$  ?
6. Montrer que les variables aléatoires  $Y - X$  et  $X + 1$  ont même loi. Quelles relations peut-on en déduire entre  $\mathbb{E}X$  et  $\mathbb{E}Y$  ? Entre  $\text{Var}(X)$ ,  $\text{Var}(Y)$  et  $\text{Cov}(X, Y)$  ?
7. En déduire les valeurs

$$\mathbb{E}X = \frac{N-1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}Y = \frac{2N+1}{3}.$$

8. Montrer la relation

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

En déduire la valeur de  $\mathbb{E}Y^2$  puis celle de  $\text{Var}(Y)$ . Que vaut  $\text{Var}(X)$  ?

9. Que vaut  $\text{Cov}(X, Y)$  ? Interpréter le signe de cette quantité.