Université Pierre et Marie Curie Probabilités
Année 2014-2015 LM390

Interrogation du 9 février 2015 : corrigé

Question de cours.

1. L'espérance est définie par $\mathbb{E}X = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X = n) \in [0, \infty]$. Dans le cas où $\mathbb{E}X < \infty$ et $\mathbb{E}Y < \infty$, la variance et la covariance sont définies par $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$ et $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)]$.

2. $\mathbb{E}[(X - \lambda)^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\lambda\mathbb{E}X + \lambda^2$ est un polynôme de degré 2 en λ qui atteint son minimum en $\lambda_0 = \mathbb{E}X$. On a donc
$$\inf_\lambda \mathbb{E}[(X - \lambda)^2] = \mathbb{E}[(X - \lambda_0)^2] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathrm{Var}X.$$

Exercice 1.
On a
$$\mathrm{Var}(X) = \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[(X - \lambda)^2\right] \le \mathbb{E}\left[\left(X - \frac{N}{2}\right)^2\right].$$
De plus, X étant à valeurs dans $\{0, \ldots, N\}$, on a $(X - \frac{N}{2})^2 \le \left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{N^2}{4}$ presque sûrement.

La borne est atteinte si la variable X est définie par $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = N) = \frac{1}{2}$. On a alors en effet
$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}(0 + N) = \frac{N}{2},$$
et
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[\left(X - \frac{N}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left(\left(0 - \frac{N}{2}\right)^2 + \left(N - \frac{N}{2}\right)^2\right) = \frac{N^2}{4}.$$

Exercice 2.

1. On a
$$2\sum_{k=1}^{N} k = \sum_{k=1}^{N} k + \sum_{k=1}^{N}(N + 1 - k) = \sum_{k=1}^{N}(N + 1) = N(N + 1),$$
d'où le résultat.

2. Le couple (X, Y) est tiré uniformément parmi l'ensemble
$$\{(n, m) \in \{0, \ldots, N\}^2, n < m\} = \bigcup_{m=1}^{N} \{(n, m), n \in \{0, \ldots, m - 1\}\},$$
qui a pour cardinal
$$\sum_{m=1}^{N} \mathrm{Card}\{(n, m), n \in \{0, \ldots, m - 1\}\} = \sum_{m=1}^{N} m = \frac{N(N + 1)}{2}.$$
On a donc, pour n et m dans $\{0, \ldots, N\}$,
$$\mathbb{P}(X = n, Y = m) = \frac{2\mathbf{1}_{n<m}}{N(N + 1)}.$$

3. On a

$$\mathbb{P}(X=n)=\sum_{m=0}^{N}\mathbb{P}(X=n,Y=m)=\frac{2}{N(N+1)}\sum_{m=0}^{N}\mathbf{1}_{n<m}=\frac{2}{N(N+1)}\sum_{m=n+1}^{N}1$$
$$=\frac{2(N-n)}{N(N+1)}$$

et

$$\mathbb{P}(Y=m)=\sum_{n=0}^{N}\mathbb{P}(X=n,Y=m)=\frac{2}{N(N+1)}\sum_{n=0}^{N}\mathbf{1}_{n<m}=\frac{2}{N(N+1)}\sum_{n=0}^{m-1}1$$
$$=\frac{2m}{N(N+1)}.$$

4. La relation $\mathbb{P}(Y=m)\neq 0$ est vérifiée dès que $m\neq 0$. Dans ce cas, on a

$$\mathbb{P}(X=n|Y=m)=\frac{\mathbb{P}(X=n,Y=m)}{\mathbb{P}(Y=m)}=\left(\frac{2\mathbf{1}_{n<m}}{N(N+1)}\right)\left(\frac{2m}{N(N+1)}\right)^{-1}$$
$$=\begin{cases}0 & \text{si } n\geq m\\ \frac{1}{m} & \text{sinon.}\end{cases}$$

Autrement dit, sachant $\{Y=m\}$, la variable X suit la loi uniforme sur $\{0,\dots,m-1\}$. De même, on a

$$\mathbb{P}(Y=m|X=n)=\begin{cases}0 & \text{si } m\leq n\\ \frac{1}{N-n} & \text{sinon,}\end{cases}$$

et, sachant $\{X=n\}$ (avec $n\neq N$), la variable Y suit la loi uniforme sur $\{n+1,\dots,N\}$.

5. On écrit $\mathbb{P}(X=n)=\frac{2(N-n)}{N(N+1)}=\mathbb{P}(Y=N-n)=\mathbb{P}(N-Y=n)$. Les variables X et $N-Y$ ont bien la même loi. On a donc $\mathbb{E}X=\mathbb{E}[N-Y]=N-\mathbb{E}Y$ pour l'espérance (l'espérance d'une variable, de même que sa variance, ne dépend que de sa loi). Pour la variance :

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(N-Y)=\mathbb{E}\left[((N-Y)-\mathbb{E}[N-Y])^2\right]=\mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[Y]-Y)^2\right]=\mathrm{Var}(Y).$$

6. On a

$$\mathbb{P}(Y-X=n)=\mathbb{P}(Y=X+n)=\sum_{k=0}^{N-n}\mathbb{P}(Y=k+n,X=k)$$
$$=\sum_{k=0}^{N-n}\frac{2}{N(N+1)}$$
$$=\frac{2(N-n+1)}{N(N+1)}$$
$$=\mathbb{P}(X=(n-1))$$
$$=\mathbb{P}(X+1=n).$$

Les variables $Y-X$ et $X+1$ ont donc même loi. On en déduit $\mathbb{E}[Y-X]=\mathbb{E}X+1$, soit $2\mathbb{E}X-\mathbb{E}Y=-1$. On a de plus $\mathrm{Var}X=\mathrm{Var}(X+1)=\mathrm{Var}(Y-X)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)-2\mathrm{Cov}(X,Y)$. Comme on savait que $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(Y)$, on obtient $\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{2}\mathrm{Var}(X)$.

7. Les équations $\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y = N$ et $2\mathbb{E}X - \mathbb{E}Y = -1$ ont pour unique solution $\mathbb{E}X = \frac{N-1}{3}$ et $\mathbb{E}Y = \frac{2N+1}{3}$.

8. Par récurrence : le résultat est clair pour $n = 1$. Si on admet la relation pour un n fixé, on obtient (en utilisant l'identité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$)

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = (n+1)\left((n+1) + 2\sum_{k=1}^{n} k\right) &= (n+1)\left((n+1) + n(n+1)\right) \\ &= (n+1)^3.\end{aligned}$$

On a donc

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3.$$

On a

$$\mathbb{E}Y^2 = \sum_{n=0}^{N} n^2 \mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=0}^{N} \frac{2n^3}{N(N+1)} = \frac{2}{N(N+1)} \left(\sum_{n=0}^{N} n\right)^2 = \frac{N(N+1)}{2},$$

d'où

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}Y)^2 = \frac{N(N+1)}{2} - \left(\frac{2N+1}{3}\right)^2 = \frac{N^2 + N - 2}{18}.$$

De plus, on sait que $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y)$.

9. On a vu que $\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2}\mathrm{Var}(X) = \frac{N^2+N-1}{36}$. C'est une quantité positive, en effet, on a vu que conditionnellement à $\{Y = m\}$, la variable X est uniforme sur $\{0, \ldots, m-1\}$. Par conséquent, quand Y prend de grandes valeurs, X peut elle aussi prendre de grandes valeurs, et quand Y prend de petites valeurs, X est forcée de prendre de petites valeurs. Le fait pour deux variables de prendre en même temps de grandes valeurs ou de petites valeurs correspond à une covariance positive.