Université Pierre et Marie Curie Probabilités
Année 2014-2015 LM390

Interrogation du 2 mars 2015

Durée : 1 heure 30

Exercice 1.
On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ si elle vérifie la relation $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

1. Montrer que la fonction caractéristique de la loi de Poisson de paramètre λ est donnée par $t \mapsto e^{\lambda(e^{it}-1)}$.
2. Calculer l'espérance et la variance d'une variable de loi de Poisson de paramètre λ.
3. Montrer que si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ, alors $X + Y$ suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Exercice 2.
Soient X, Y et Z trois variables indépendantes de loi normale centrée réduite, dont la densité est donnée par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

1. Donner la densité de la loi du couple (Y, Z).
2. Montrer que la variable $T = Y^2 + Z^2$ est indépendante de X et qu'elle suit une loi exponentielle de paramètre $1/2$, dont la densité est $\frac{1}{2}e^{-t/2}\mathbf{1}_{t\geq 0}$.
3. Soit U est une variable positive indépendante de X de loi à densité f. Montrer que la variable $\frac{X}{\sqrt{X^2+U}}$ est à valeurs dans $]-1,1[$ et admet la densité
$$g(t) = \frac{(1-t^2)^{-3/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{ut^2}{2(1-t^2)}} f(u)\sqrt{u}\mathrm{d}u$$
pour $t \in]-1,1[$.
4. Montrer la relation
$$\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda x}{2}}\sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda^{3/2}}.$$
5. En déduire la loi de $\frac{X}{X^2+Y^2+Z^2}$.