Université Pierre et Marie Curie Probabilités
Année 2014-2015 LM390

Corrigé de l'interrogation du 2 mars 2015

Exercice 1.

On note X une variable de loi de Poisson de paramètre λ.

1. La fonction caractéristique Φ de X est définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $\Phi(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]$. On écrit alors

$$\Phi(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}}.$$

2. Comme les variables X et X^2 sont intégrables, le théorème de dérivation sous l'espérance montre que Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie

$$i\mathbb{E}[Xe^{itX}] = \Phi'(t) = \lambda(ie^{it})e^{\lambda(e^{it}-1)} = i\lambda e^{it+\lambda(e^{it}-1)}$$

et

$$-\mathbb{E}[X^2e^{itX}] = \Phi''(t) = (i + i\lambda e^{it})i\lambda e^{it+\lambda(e^{it}-1)}.$$

On trouve donc $i\mathbb{E}X = \Phi'(0) = i\lambda$ et $-\mathbb{E}X^2 = \Phi''(0) = -(\lambda + \lambda^2)$. On a donc $\mathbb{E}X = \lambda$ et $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \lambda$.

3. En utilisant l'indépendance de X et Y, on trouve que la fonction caractéristique de $X+Y$ est donnée par

$$\Phi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{it(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{itX}e^{itY}] = \mathbb{E}[e^{itX}]\mathbb{E}[e^{itY}] = e^{\lambda(e^{it}-1)}e^{\mu(e^{it}-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^{it}-1)}.$$

La variable $X + Y$ a donc la même fonction caractéristique qu'une variable de loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. Comme la fonction caractéristique caractérise la loi, on en déduit que $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 2.

1. Commes les variables Y et Z sont indépendantes et suivent des lois à densités, le couple (Y, Z) suit lui aussi une loi à densité, cette densité étant donnée par le produit tensoriel des densités de Y et Z, soit :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}\right) = \frac{1}{2\pi}e^{-(y^2+z^2)/2}.$$

2. Le couple (Y, Z) est indépendant de la variable X. Par conséquent toute variable de la forme $h(Y, Z)$ avec $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mesurable sera indépendante de X. C'est notamment le cas en prenant $h(y, z) = y^2 + z^2$.

Pour trouver la loi de T, on considère une fonction φ mesurable et bornée. On a alors

$$\mathbb{E}[\varphi(T)] = \mathbb{E}[\varphi(Y^2 + Z^2)] = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(y^2 + z^2)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y^2+z^2}{2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Un changement de variable polaire, donné par

$$\begin{aligned}]0,\infty[\times]-\pi,\pi[&\to \mathbb{R}^2 \setminus (]-\infty,0]\times\{0\}), \\ (r,\theta) &\mapsto (y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta), \\ r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta &= \mathrm{d}y\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

amène à l'égalité (noter que les ensembles $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 \setminus (]-\infty,0]\times\{0\})$ ne diffèrent que d'un ensemble de mesure nulle)

$$\mathbb{E}[\varphi(T)] = \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(r^2)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^\infty \varphi(r^2)e^{-\frac{r^2}{2}} r\mathrm{d}r.$$

Le changement de variables $t = r^2$, vérifiant $\mathrm{d}t = 2r\mathrm{d}r$ donne enfin

$$\mathbb{E}[\varphi(T)] = \frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi(t)e^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t,$$

ce qui montre que T suit la loi exponentielle de paramètre $1/2$.

3. Les variables X et U étant indépendantes, la densité de (X,U) est donnée par

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}f_U(u).$$

Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable et bornée, on a

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(\frac{X}{\sqrt{X^2+U}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+u}}\right)e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right) f_U(u)\mathrm{d}u$$

Le changement de variables $t = \frac{x}{\sqrt{x^2+u}}$ est bijectif entre $x \in \mathbb{R}$ et $t \in]-1,1[$, de réciproque $x = \frac{t\sqrt{u}}{\sqrt{1-t^2}}$ et vérifie

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\frac{t\sqrt{u}}{\sqrt{1-t^2}}\right) = \frac{\mathrm{d}t\sqrt{u}}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{t^2\sqrt{u}}{(1-t^2)^{3/2}}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t\sqrt{u}}{(1-t^2)^{3/2}}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\varphi\left(\frac{X}{\sqrt{X^2+U}}\right)\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \left(\int_{-1}^1 \varphi(t)\, e^{-\frac{ut^2}{2(1-t^2)}}\frac{\mathrm{d}t\sqrt{u}}{(1-t^2)^{3/2}}\right) f_U(u)\mathrm{d}u \\ &= \int_{-1}^1 \varphi(t)\left(\frac{1}{(1-t^2)^{3/2}\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{ut^2}{2(1-t^2)}} f_U(u)\sqrt{u}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

4. En faisant le changement de variable $\lambda x = y^2$ puis une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda x}{2}}\sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda^{3/2}}\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}y^2\mathrm{d}y &= \frac{2}{\lambda^{3/2}}\left(\left[-ye^{-y^2/2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-y^2/2}\mathrm{d}y\right) \\ &= \frac{2}{\lambda^{3/2}}\left(0 + \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda^{3/2}}. \end{aligned}$$

5. D'après les questions 2 et 3, la variable $\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$ a une densité portée par $[-1,1]$ et donnée par

$$\begin{aligned}\frac{1}{2(1-t^2)^{3/2}\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{ut^2}{2(1-t^2)}}\frac{e^{-\frac{u}{2}}}{2}\sqrt{u}\mathrm{d}u &= \frac{1}{2(1-t^2)^{3/2}\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{u}{2(1-t^2)}}\sqrt{u}\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2(1-t^2)^{3/2}\sqrt{2\pi}}\times\sqrt{2\pi}(1-t^2)^{3/2}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

la deuxième égaltié découlant de relation de la question 4 appliquée à $\lambda = (1-t^2)^{-1}$. Par conséquent $\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$ suit la densité $\frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}$ c'est-à-dire que $\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$ est uniformément distribuée[1] sur $[-1,1]$.

[1]Si X, Y et Z sont trois variables normales centrées réduites, on peut vérifier que la loi du triplet (X,Y,Z) est invariante par rotation autour de l'origine. Par conséquent, la variable $(X,Y,Z)/\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ a une loi invariante par rotation et est portée par la sphère unité en dimension 3. Autrement dit cette variable est distribuée uniformément sur la sphère unité. Le résultat de cet exercice porte sur la loi de la première coordonnée de ce triplet. On a donc démontré le résultat suivant : *les coordonnées d'une variable aléatoire tirée uniformément sur la sphère unité en dimension* 3 *sont distribuées uniformément sur le segment* $[-1,1]$.

On peut aussi remarquer que les marginales de la loi uniforme sur la sphère unité de dimension trois sont les mêmes que celles de la loi uniforme sur le cube $[-1,1]^3$, alors que les lois des triplets ne sont pas les mêmes.