Université Pierre et Marie Curie — Probabilités
Année 2014-2015 — LM390

Interrogation du 13 avril 2015

Durée : 1 heure 30

Question de cours.
Donner les principales implications entre les différents types de convergence de variables aléatoires.

Exercice.
Dans cet exercice, on dira qu'une variable aléatoire réelle X vérifie la propriété (I) si elle satisfait

$$\lim_n n\mathbb{P}(|X| \geq n) = 0.$$

De plus, on dira que la variable X admet une espérance au sens faible si la suite $\left(\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{|X|<n\}}]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. La limite de cette suite sera appelée espérance au sens faible de X.

1. (a) Montrer qu'une variable aléatoire intégrable admet une espérance au sens faible, donnée par $\mathbb{E}X$. Autrement dit, la notion d'espérance au sens faible généralise la notion d'espérance.
   (b) Montrer qu'une variable aléatoire intégrable vérifie la propriété (I). On pourra utiliser l'inégalité $n\mathbf{1}_{\{|X|\geq n\}} \leq |X|$.
2. (a) Montrer que la fonction $f(x) = \frac{C\mathbf{1}_{|x|>2}}{x^2 \ln |x|}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, pour une certaine valeur $C \in \mathbb{R}$ que l'on ne cherchera pas à calculer explicitement.
   (b) Montrer qu'une variable aléatoire dont la loi admet pour densité f n'est pas intégrable.
   (c) Montrer qu'une variable aléatoire de loi de densité f vérifie la propriété (I) et admet une espérance au sens faible que l'on précisera.
3. Dans cette question, on considère une variable X dont la loi vérifie la condition (I) et admet $\mu \in \mathbb{R}$ comme espérance au sens faible.
   (a) Pour $t \in \mathbb{R}$, montrer la convergence $\mathbb{E}[n(e^{itX/n} - 1)\mathbf{1}_{|X|\geq n}] \to_n 0$.
   (b) Montrer les relations suivantes :
   $$\begin{aligned}\frac{1}{n}\mathbb{E}[X^2\mathbf{1}_{|X|<n}] &\leq \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} m^2\mathbb{P}(m-1 \leq |X| < m)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}(2m+1)\mathbb{P}(|X| \geq m) - n\mathbb{P}(|X| \geq n)\\ &\to_n 0.\end{aligned}$$
   (c) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{e^{ix}-1-ix}{x^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. À l'aide de la question (3b), en déduire que quel que soit $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[(n(e^{itX/n} - 1) - itX)\mathbf{1}_{|X|<n}]$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.
   (d) Montrer le développement, pour tout t réel, $\mathbb{E}[e^{itX/n}] = 1 + \frac{it\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
   (e) En déduire la loi faible des grands nombres suivante : si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X, alors
   $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{prob.}_n \mu.$$
   On pourra commencer par montrer une convergence en loi.