Corrigé de l'interrogation du 13 avril 2015

1. (a) La suite de variables aléatoires $(X\mathbf{1}_{|X|<n})_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par la variable intégrable $|X|$ et tend presque sûrement vers X. Par le théorème de convergence dominée, on a

$$\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{|X|<n}] \to \mathbb{E}X,$$

ce qui par définition, signifie que $\mathbb{E}X$ est l'espérance au sens faible de X.

(b) La suite de variables aléatoires $(n\mathbf{1}_{\{|X|\geq n\}})_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par la variable intégrable $|X|$. De plus, on a la convergence presque sûre $n\mathbf{1}_{\{|X|\geq n\}} \to 0$. Par conséquent, par le théorème de convergence dominée, on a

$$n\mathbb{P}(|X|\geq n) = \mathbb{E}[n\mathbf{1}_{\{|X|\geq n\}}] \to 0.$$

La variable X vérifie donc la propriété (I).

2. (a) Sur l'ensemble $\{x\in\mathbb{R},\ |x|>2\}$, on a l'inégalité $\ln|x| \geq \ln 2 > 0$. Par conséquent la fonction f est positive (car x^2 est positif) et de plus, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{|x|>2}\frac{dx}{x^2\ln|x|} = 2\int_2^\infty \frac{dx}{x^2\ln x} \leq \frac{2}{\ln 2}\int_2^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\ln 2} < \infty$$

La fonction f est donc positive et intégrable. Si l'on choisit $C = \left(2\int_2^\infty dx/(x^2\ln x)\right)^{-1}$, alors f est d'intégrale 1, et il s'agit donc d'une densité de probabilité.

(b) Si X a pour loi $f(x)dx$, on a

$$\mathbb{E}|X| = \int_{\mathbb{R}} |x|f(x)dx = 2\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = 2\Big[\ln\ln x\Big]_2^\infty = \infty.$$

La variable X n'est donc pas intégrable.

(c) Si X suit la loi $f(x)dx$, on a

$$n\mathbb{P}(|X|\geq n) = 2n\int_n^\infty \frac{dx}{x^2\ln x} \leq \frac{2n}{\ln n}\int_n^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{\ln n} \to 0,$$

de sorte que X vérifie la propriété (I). Ensuite, on a

$$\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{|X|<n}] = \int_2^n \frac{dx}{x\ln x} + \int_{-n}^{-2} \frac{dx}{x\ln(-x)} = 0,$$

par imparité. La suite $(\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{|X|<n}])_{n\in\mathbb{N}}$, étant constante, converge (vers 0). Par conséquent, X admet 0 comme espérance au sens faible.

3. (a) On a

$$\left|\mathbb{E}\left[n(e^{itX/n}-1)\mathbf{1}_{|X|\geq n}\right]\right| \leq \mathbb{E}\left[n\left|e^{itX/n}-1\right|\mathbf{1}_{|X|\geq n}\right] \leq 2\mathbb{E}[n\mathbf{1}_{|X|\geq n}] = 2n\mathbb{P}(|X|\geq n) \to_n 0,$$

puisque X est supposée vérifier (I).

(b) La première inégalité s'obtient en écrivant que $\frac{1}{n}\mathbb{E}[X^2\mathbf{1}_{|X|<n}]$ est égal à

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\mathbb{E}[X^2\mathbf{1}_{m-1\leq|X|<m}] \leq \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}m^2\mathbb{E}[\mathbf{1}_{m-1\leq|X|<m}] = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}m^2\mathbb{P}(m-1\leq|X|<m)$$

Ce dernier terme se récrit comme suit :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}m^2\left(\mathbb{P}(|X|\geq m-1)-\mathbb{P}(|X|\geq m)\right)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}m^2\mathbb{P}(|X|\geq m-1)-\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}m^2\mathbb{P}(|X|\geq m)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}(m+1)^2\mathbb{P}(|X|\geq m)-\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}m^2\mathbb{P}(|X|\geq m)-\frac{1}{n}n^2\mathbb{P}(|X|\geq n)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}(2m+1)\mathbb{P}(|X|\geq m)-n\mathbb{P}(|X|\geq n).
\end{aligned}$$

Le deuxième terme obtenu tend vers 0 par la propriété (I). Le premier terme est la moyenne de Cesáro de la suite $((2m+1)\mathbb{P}(|X|\geq m))_{m\in\mathbb{N}}$. Comme cette suite tend vers 0 (par la propriété (I)), sa moyenne de Cesàro également.

(c) La fonction $x\mapsto\frac{e^{ix}-1-ix}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. De plus, un développement limité en $x=0$ donne

$$\frac{e^{ix}-1-ix}{x^2}=\frac{1+ix-x^2/2+o(x^2)-1-ix}{x^2}=-\frac{1}{2}+o(1).$$

Par conséquent la fonction est également continue en 0. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. De plus elle tend vers 0 en $\pm\infty$, elle est donc bornée (par une constante K). On a donc

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}[(n(e^{itX/n}-1)-itX)\mathbf{1}_{|X|<n}]\right| &= t^2\left|\mathbb{E}\left[\frac{(e^{itX/n}-1-itX/n)}{(tX/n)^2}\frac{X^2}{n}\mathbf{1}_{|X|<n}\right]\right|\\
&\leq t^2K\mathbb{E}\left[\frac{X^2}{n}\mathbf{1}_{|X|<n}\right].
\end{aligned}$$

Ce dernier terme tend bien vers 0 d'après la question (3b).

(d) On écrit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{itX/n}]=1+\frac{1}{n}\mathbb{E}\left[itX\mathbf{1}_{|X|<n}\right]&+\frac{1}{n}\mathbb{E}\left[(n(e^{itX/n}-1)-itX)\mathbf{1}_{|X|<n}\right]\\
&+\frac{1}{n}\mathbb{E}\left[(n(e^{itX/n}-1))\mathbf{1}_{|X|\geq n}\right].
\end{aligned}$$

D'après les questions (3a) et (3c), les deux derniers termes sont négligeable devant $1/n$. Le terme $\mathbb{E}\left[itX\mathbf{1}_{|X|<n}\right]$ converge vers $it\mu$ car μ est l'espérance au sens faible de X. On a bien le développement voulu.

(e) La fonction caractéristique φ_n de $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ vérifie

$$\varphi_n(t)=\mathbb{E}\left[e^{itX/n}\right]^n=\left(1+\frac{it\mu}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{it\mu}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=e^{it\mu+o(1)}.$$

La suite φ_n converge donc vers la fonction caractéristique de la variable aléatoire constante égale à μ. Par conséquent $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ converge en loi vers μ. Comme la limite est constante, il s'agit en fait d'une convergence en probabilité.