UPMC 2014-2015
Licence L3 - LM 390

Partiel du 25 mars 2015. Durée 2h.
Sans documents ni calculatrice ni portable.

Notations : $\mathbb{P}$ est la probabilité de référence, p.s. signifie presque sûrement, v.a. signifie variable aléatoire. $\mathbb{E}(U)$ désigne l'espérance de la v.a. $U$.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{1}_A$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $A$.

**Question de cours.**

1) Donner les définitions de la fonction de répartition et de la fonction caractéristique d'une v.a.

2) Enoncer le lemme de Borel-Cantelli.

3) Donner les définitions de la convergence en probabilité et de la convergence en loi.

**Exercice 1.** La v.a. $X$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On fixe $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ et on définit $Y = \mathrm{e}^{\sigma X + m}$.

1) Montrer que $Y$ possède une densité que l'on déterminera.

2) a) Montrer, pour tous $x$ et $y$ réels, l'égalité

$$\mathbb{E}(e^{(x+iy)X}) = e^{\frac{x^2}{2}+ixy}\mathbb{E}(e^{iyX}).$$

b) Montrer que pour $y$ réel, l'espérance $\mathbb{E}(e^{iyX})$ est réelle.

3) Dans cette question on suppose que $m = 0$ et $\sigma = 1$. On considère la fonction $\varphi$ définie par

$$\varphi(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}(1+\sin(\pi \ln x))e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x).$$

a) Montrer que $\varphi$ est une densité de probabilité.

b) Soit Z une variable aléatoire de densité $\varphi$. Montrer que $\mathbb{E}(Y^n) = \mathbb{E}(Z^n)$ pour tout entier $n \geq 1$. On pourra utiliser le résultat de la question 2).

**Exercice 2.** $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ désignent deux suites de variables aléatoires.

1) On suppose dans cette question que $X_n$ converge en loi vers une variable aléatoire $X$, et que $Y_n$ converge en loi vers une constante $c$.

a) Montrer que $Y_n$ converge en probabilité vers $c$. On pourra utiliser la caractérisation de la convergence en loi par la fonction de répartition.

b) Montrer que pour tout $t$ réel, $\mathbb{E}(e^{it(X_n+Y_n)} - e^{it(X_n+c)})$ tend vers 0.

c) Montrer que $X_n + Y_n$ converge en loi vers $X + c$.

2) Montrer que si $X_n$ converge en probabilité vers une variable aléatoire $X$ et $Y_n$ converge en probabilité vers une variable aléatoire $Y$, alors $X_n + Y_n$ converge en probabilité vers $X + Y$.

**Exercice 3.** $p$ et $q$ sont deux réels dans $]0, 1[$. On note $S$ et $T$ deux v.a. indépendantes de lois géométriques sur $\mathbb{N}$ de paramètres respectifs $p$ et $q$. Rappel : cela signifie que pour tout entier naturel $n$ on a $\mathbb{P}(S = n) = (1-p)p^n$ et $\mathbb{P}(T = n) = (1 - q)q^n$.

1) Montrer que $\mathbb{P}(S \geq m) = p^m$ et $\mathbb{P}(T \geq m) = q^m$ pour tout entier naturel $m$.

2) Déterminer la loi de $\min(S, T)$ ainsi que celle de $S - T$ et montrer que ces deux variables sont indépendantes.