Corrigé du Partiel

Question de cours. cf. Cours.

Exercice 1.

1) Soit g une fonction mesurable bornée. Calculons

$$\mathbb{E}[g(Y)] = \int_{\mathbb{R}} g(e^{\sigma X+m}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = \int_0^{+\infty} g(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma y} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln y - m)^2}\, dy$$

où on a effectué le changement de variable $y = e^{\sigma x+m}$, ou bien $x = \frac{1}{\sigma}(\ln(y) - m)$, $dx = \frac{1}{\sigma y}dy$. Ainsi, Y a pour densité

$$\frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln y - m)^2}\, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(y).$$

2) a) On a, avec le changement de variables $u = t - x$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{(x+iy)X}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{(x+iy)t} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{iyt} e^{-\frac{1}{2}(t-x)^2} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{iy(u+x)} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}x^2+ixy} \int_{\mathbb{R}} e^{iyu} e^{-\frac{1}{2}u^2} du) \\
&= e^{\frac{1}{2}x^2+ixy}\mathbb{E}[e^{iyX}].
\end{aligned}$$

b) Comme X et $-X$ ont même loi, on a $\mathbb{E}[e^{iyX}] = \mathbb{E}[e^{-iyX}] = \overline{\mathbb{E}[e^{iyX}]}$, donc $\mathbb{E}[e^{iyX}]$ est réel.

3) a) Clairement, φ est positive, et il reste donc à montrer que $\int \varphi(x)dx = 1$. Par la question 1), en prenant $\sigma = 1, m = 0$, on sait déjà que $\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2}\, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x)$ est une densité de probabilité, donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2}\, dx = 1\,,$$

et il reste à montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \sin(\pi \ln x) e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2}\, dx = \mathcal{I}m \left[\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{i\pi \ln x} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2}\, dx \right] = 0.$$

Par le changement de variable $t = \ln x$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{i\pi \ln x} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\pi t} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \mathbb{E}[e^{i\pi X}],$$

qui est bien de partie imaginaire nulle, par la question 2) b).

b) On a, en utilisant que la densité de Y est $\frac{1}{y\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(\ln y)^2}\, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(y)$,

$$\mathbb{E}[Z^n] = \int_0^{\infty} \frac{x^n}{x\sqrt{2\pi}} (1 + \sin(\pi \ln x))\, e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} dx = \mathbb{E}[Y^n] + \int_0^{\infty} \frac{x^n}{x\sqrt{2\pi}} \sin(\pi \ln x)\, e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} dx.$$

Montrons que le dernier terme est égal à 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$. En faisant le changement de variable $t = \ln x$, on a

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{x\sqrt{2\pi}} \sin(\pi \ln x)\, e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{nt} \sin(\pi t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \mathcal{I}m \left[\mathbb{E}(e^{(n+i\pi)X})\right] .$$

En utlisisant la question 2), on obtient que $\mathbb{E}(e^{(n+i\pi)X}) = e^{\frac{1}{2}n^2+i\pi n}\mathbb{E}[e^{i\pi X}] = e^{\frac{1}{2}n^2}(-1)^n\mathbb{E}[e^{i\pi X}]$, et est donc de partie imaginaire égale à 0.

Exercice 2.

1) a) Comme Y_n converge en loi vers c, la fonction de répartition de Y_n $F_{Y_n}(t) = \mathbb{P}(Y_n \leq t)$ converge vers $\mathbf{1}_{[c,\infty[}(t)$ pour tout $t \neq c$. On a donc, pour tout $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|Y_n - c| \geq \epsilon) = \mathbb{P}(Y_n \leq c - \epsilon) + \mathbb{P}(Y_n \geq c + \epsilon) \leq F_{Y_n}(c - \epsilon) + 1 - F_{Y_n}(c + \epsilon/2) \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Donc Y_n converge en probabilité vers c.

b) On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left|\mathbb{E}[e^{it(X_n+Y_n)} - e^{it(X_n+c)}]\right| = \left|\mathbb{E}[e^{itX_n}(e^{itY_n} - e^{itc})]\right| \leq \mathbb{E}[|e^{itY_n} - e^{itc}|],$$

car $|e^{itX_n}| = 1$. Comme Y_n converge en loi vers c et comme la fonction $x \mapsto |e^{itx} - e^{itc}|$ est continue et bornée, on a

$$\lim_n \mathbb{E}[|e^{itY_n} - e^{itc}|] = \mathbb{E}[|e^{itc} - e^{itc}|] = 0.$$

c) On utilise le critère de convergence des fonctions caractéristiques. Montrons que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{it(X_n+Y_n)}] = \mathbb{E}[e^{it(X+c)}]$. On a, par l'inégalité triangulaire

$$\left|\mathbb{E}[e^{it(X_n+Y_n)}] - \mathbb{E}[e^{it(X+c)}]\right| \leq \left|\mathbb{E}[e^{it(X_n+Y_n)} - e^{it(X_n+c)}]\right| + \left|\mathbb{E}[e^{it(X_n+c)} - e^{it(X+c)}]\right|.$$

Par la question b), on a déjà que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{it(X_n+Y_n)} - e^{it(X_n+c)}] = 0$. Pour l'autre terme, on factorise par e^{itc}, de sorte que $\left|\mathbb{E}[e^{it(X_n+c)} - e^{it(X+c)}]\right| = \left|\mathbb{E}[e^{itX_n} - e^{itX}]\right|$. Mais on sait que X_n converge en loi vers X, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{itX_n}] = \mathbb{E}[e^{itX}]$. Au final, on a montré que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\mathbb{E}[e^{it(X_n+Y_n)}] - \mathbb{E}[e^{it(X+c)}]\right| = 0,$$

qui était ce que l'on voulait montrer.

2) Soit $\epsilon > 0$. On a par l'inégalité triangulaire $|X_n + Y_n - (X + Y)| \leq |X_n - X| + |Y_n - Y|$, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(|X_n + Y_n - (X + Y)| \geq \epsilon\big) &\leq \mathbb{P}\big(|X_n - X| + |Y_n - Y| \geq \epsilon\big) \\
&\leq \mathbb{P}\big(\{|X_n - X| \geq \epsilon/2\} \cup \{|Y_n - Y| \geq \epsilon/2\}\big) \\
&\leq \mathbb{P}\big(|X_n - X| \geq \epsilon/2\big) + \mathbb{P}\big(|Y_n - Y| \geq \epsilon/2\big).
\end{aligned}$$

Comme X_n converge en probabilité vers X et Y_n converge en probabilité vers Y, les deux termes de la somme tendent vers 0, et on a bien $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(|X_n + Y_n - (X + Y)| \geq \epsilon\big) = 0$.

Exercice 3.

1) On a facilement

$$\mathbb{P}(S \geq m) = \sum_{k=m}^{+\infty} \mathbb{P}(S = k) = \sum_{k=m}^{+\infty} (1 - p)p^k = (1 - p)p^m \sum_{j=0}^{+\infty} p^j = p^m .$$

De manière similaire, $\mathbb{P}(T \geq m) = q^m$.

2) Soit $X = \min(S, T)$, et $Y = S - T$. On a, par indépendance,

$$\mathbb{P}(X \geq m) = \mathbb{P}(S \geq m, T \geq m) = \mathbb{P}(S \geq m)\mathbb{P}(T \geq m) = (pq)^m ,$$

donc X est une variable géométrique de paramètre pq: $\mathbb{P}(X = n) = (1 - pq)(pq)^n$.

Calculons la loi jointe de (X, Y): pour $i \geq 0$, $j \in \mathbb{Z}$, on veut calculer $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$. On distingue plusieurs cas: $j > 0$, $j = 0$, $j < 0$, et on utilise l'indépendance de T et S.

- Si $j > 0$, on a $S > T$, donc $\min(S, T) = T$

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(T = i, S = i + j) = \mathbb{P}(T = i)\mathbb{P}(S = i + j) = (1 - p)(1 - q)(pq)^i q^j .$$

- Si $j = 0$, on a

$$\mathbb{P}(X = i, Y = 0) = \mathbb{P}(T = i, S = i) = \mathbb{P}(T = i)\mathbb{P}(S = i) = (1 - p)(1 - q)(pq)^i .$$

- Si $j < 0$, on a $S < T$, donc $\min(S, T) = S$

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(S = i, T = i - j) = \mathbb{P}(T = i)\mathbb{P}(S = i + j) = (1 - p)(1 - q)(pq)^i p^{-j} .$$

Au final, on a la loi jointe de (X, Y):

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = (1 - pq)(pq)^i \times \frac{(1 - p)(1 - q)}{1 - pq} \big(p\mathbf{1}_{j<0} + q\mathbf{1}_{j\geq 0}\big)^{|j|} .$$

On voit qu'elle s'écrit comme le produit de $\mathbb{P}(X = i)$ et d'une fonction de j: X et Y sont indépendantes, et on a la loi de $Y = S - T$

$$\mathbb{P}(Y = j) = \frac{(1 - p)(1 - q)}{1 - pq} \big(p\mathbf{1}_{j<0} + q\mathbf{1}_{j\geq 0}\big)^{|j|} .$$