Université Paris Diderot
Université Pierre et Marie Curie **2014 - 2015**
Master MEEF première année
Fabrice Vandebrouck, vandebro@univ-paris-diderot.fr
Francoise Hérault, francoise.herault@espe-paris.fr

Nombres réels et suites numériques

---

1 Nécessité de définir les nombres réels comme objets mathématiques

Les mathématiques en Licence sont dominées par l'analyse, c'est-à-dire pour vous donner une idée les études de fonctions ou de suites numériques.

Les fondements de l'analyse trouvent leurs origines dans les travaux du 18ème siècle. Ce siècle est marqué par un grand intérêt pour les calculs numériques (par exemple le calcul approché des racines d'une fonction chez Lagrange ou encore les valeurs approchées de chez Euler) mais aussi par l'apparition de nouvelles branches des mathématiques dans lesquelles la notion de fonction joue un rôle majeur (par exemple les phénomènes mécaniques ou physiques qui amènent à des équations différentielles...). Ces branches ont un dénominateur commun : le calcul infinitésimal.

Au 18ème siècle, le calcul infinitésimal est considéré comme une extension du calcul algébrique, c'est-à-dire qu'aux opérations algébriques classiques, la somme, la multiplication, la composition de fonctions... viennent s'ajouter les opérations de différentiation et d'intégration. Les propriétés des fonctions élémentaires étudiées à cette époque sont donc établies au moyen de procédés algébriques. Cette façon de procéder est telle que les questions de convergence ne font pas l'objet d'un traitement rigoureux des problèmes étudiés.

La conception algébrique et formelle des fonctions qui a stimulé si longtemps l'ascension de l'analyse fonctionne alors comme un frein. Le manque de rigueur tient à la difficulté à définir de manière précise les notions de base du calcul infinitésimal : notion de fonction elle-même, de suite, de convergence, de limite, de continuité qui sont enseignées dès le lycée... Voici un exemple :

Exercice 1. (de la nécessité de définir proprement ce qu'est la limite) Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et qui admettent des limites en $+\infty$. On suppose que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

Que peut-on dire de f et g ?

A l'époque par exemple, des sommes infinies de fonctions continues sont considérées comme des fonctions continues en omettant les questions de convergences sous-jacentes. Aujourd'hui encore, les signes qu'utilise l'analyse ne diffèrent pas trop de ceux qui sont utilisés en algèbre et la présence d'une dimension algébrique dans l'activité mathématique en analyse accentue encore plus l'idée relativement fausse de cette continuité entre algèbre et analyse.

En effet, l'analyse suppose un fonctionnement différent de la démarche algébrique. Il y est essentiellement question d'approximation, de nombres ou de fonctions. En algèbre, deux expressions algébriques sont égales si on peut passer de l'une à l'autre par des égalités algébriques qui sont des équivalences. En analyse, deux nombres sont égaux si leur différence peut-être rendue aussi petite que l'on souhaite. La notion de limite est fondamentale dans les démarches de l'analyse. Les quantifications universelles ou existencielles prennent une grande importance alors que les expressions algébriques manipulées en algèbre sont en principe toujours quantifiées universellement, ce qui permet de rendre implicite ces quantifications dans des égalités entre expressions algébriques. Nous y reviendrons.

Le courant de la rigueur du 19ème siècle aide à dépasser les difficultés liées à l'analyse. A ce moment-là les mathématiciens sont de plus en plus souvent amenés à enseigner les mathématiques, ce qui contribue à la nécessité de définir les objets rigoureusement. En tentant de définir les notions de limite de suite et de fonction, les mathématiciens sont confrontés au problème de définir ce qu'est un nombre réel. Il y a donc cette fois une volonté d'arithmétiser l'analyse en ce sens que les mathématiciens nourrissent le projet de construire l'analyse sur l'arithmétique, c'est-à-dire la notion de nombre. Cette conception de l'analyse contient également la volonté de ne pas recourir aux méthodes empruntées à l'intuition géométrie dont on sait qu'elles mènent à des paradoxes difficilement surmontables comme les célèbres paradoxes de Zénon d'Elée.

Voici l'un de ces paradoxes : Zénon établit qu'un coureur ne pourrait jamais parvenir au terme d'une course parce qu'il doit d'abord parcourir la moitié de la distance, puis la moitié de la distance qui reste, puis la moitié de distance qui reste encore etc. Zénon argumentait alors de la façon suivante : le temps requis pour couvrir un nombre infini de distances doit être infini. Pourtant l'expérience nous montre bien que ce nombre infini de distances est fini. Est-ce facile à justifier sans recourir à autre chose qu'à cette expérience géométrique qui est sans appel ?

Exercice 2. Comment se modélise avec des objets mathématiques la distance parcourue par le coureur de Zénon d'Elée ? Cela permet-il de conclure que la distance est un nombre fini ?

Au lycée, tout au moins dans la voie scientifique, on admet la propriété suivante : toute suite croissante et majorée de nombre réels est convergence. Le démontre-t-on ? Non, ça se voit, comme le coureur de Zénon d'Elée qui ne peut que parvenir au terme de sa course. En général, cette brave suite croissante majorée converge vers un nombre entier 1, 2 etc mais n'avez-vous jamais rencontré une suite croissante majorée qui converge vers π par exemple ?

Exercice 3. On considère la suite 3 ; 3,1 ; 3,14 ; 3,141... Cette suite est définie par $U_0 = 3 \quad$ et $\forall n \geq 1,\ U_n = U_{n-1} + \dfrac{a_n}{10^n}$ où a_n est la nième décimale de π. Cette suite est-elle convergente ? Quelle est sa limite ?

On admet également au lycée qu'une fonction continue sur un intervalle et qui y admet des valeurs négatives et des valeurs positives s'annule nécessairement sur cet intervalle. C'est ce qui fonde le principe de dichotomie, c'est essentiellement ce qui est appelé le théorème ou la propriété des valeurs intermédiaires, l'autre grand résultat d'analyse que l'on rencontre au lycée.

Exercice 4. Pouvez-vous justifier avec ce résultat qu'il existe un nombre réel a entre 0 et π tel que $\cos(a) = a$? Si oui, pouvez-vous donnez sa valeur ?

Exercice 5. On considère la suite définie par la donnée de U_0 et pour tout $n \geq 0$

$$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{3} \sin \frac{1}{U_n}.$$

1) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{3} \sin \frac{1}{x}$ possède un unique point fixe noté L.
2) Le raisonnement suivant est-il correct
Pour tout nombre réel x non nul, $|f'(x)| < 1$. Donc on peut trouver $q < 1$ tel que pour tous les nombres réels x , $|f'(x)|$ soit inférieur ou égal à q. Ainsi la suite définie par $U_{n+1} = f(U_n)$ vérifie que pour tout n $|U_{n+1} - L| \leq q|Un - L|$, donc $|U_{n+1} - L| \leq q^n |U_1 - L|$. En conséquence la suite converge vers L.
Sinon, peut-on corriger son raisonnement ?

Si les nombres réels en tant qu'outils pour faire n'importe quelle mesure avec n'importe quelle précision ou pour résoudre un certain nombre d'équations sont bien ancrés dans les pratiques, il faut maintenant accepter d'étudier les nombres réels comme des objets mathématiques en eux-mêmes afin qu'ils puissent être ensuite des outils efficaces pour des problèmes d'analyse plus ardus. Une bonne compréhension de ce que sont les nombres réels peut en effet améliorer les conditions d'apprentissage de certaines notions d'analyse, en particulier ces notions de convergence, de limite, de continuité qui vont faire intervenir les nombres réels dans leur formalisation.

Tout d'abord quand est ce que deux nombres réels sont égaux ? Je ne veux pas parler de 2 et de 1+1 bien sûr mais de la limite de la suite des nombres décimaux $3; 3,1; 3,14; 3,141\ldots$ et du nombre π par exemple. Les nombres $0,9999$ avec une infinité de 9 est-il le nombre qui est juste avant 1 ? Est-ce que cela du sens de le dire ? Si ça a du sens alors cela signifie surement que la suite des nombres décimaux 0,9 ; 0,99 ; 0,999... converge vers ce nombre... Peut-on toujours insérer un nombre réel entre deux nombres réels distincts ? Entre 0,9999... et 1 par exemple si on les suppose distincts ? Autant que questions auxquelles il faut avoir réfléchit avant de tenir des raisonnements d'analyse !

Deux notions essentielles sont à la base de tous les théorèmes de l'analyse :

- le fait que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure ;

- le fait que toute suite de Cauchy est convergente dans $\mathbb{R}$.

D'autres propriétés liées aux suites et tout aussi caractéristiques de $\mathbb{R}$ sont plus connues au niveau du lycée :

- le fait que toute suite croissante et majorée converge dans $\mathbb{R}$;

- le fait que tout couple de suite adjacentes sont convergentes vers la même limite.

$\mathbb{Q}$ ne possège aucune de ces qualités.

Exercice 6. - Montrer que l'ensemble des nombres rationnels x tels que $x^2 < 2$ ne possède pas de borne supérieure.
- Montrer que la suite définie pour tout $n \geq 1$ par $U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{n!}$ est de Cauchy mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. On pourra considérer aussi la suite définie par $V_n = U_n + \frac{1}{nn!}$.

On peut choisir pour l'enseignement entre deux types de présentations de l'ensemble des nombres réels. Soit on adopte une caractérisation (parmi notamment les précédentes) que l'on choisit comme axiome et alors on peut en déduire toutes les propriétés dont on a besoin ; soit on construit effectivement l'ensemble des réels à partir de celui des rationnels, ce qui permet au passage de montrer l'existence de cet ensemble avant d'en établir les propriétés et caractéristiques. Nous allons nous placer dans cette optique en proposant deux constructions possibles : par les coupures de Dedekind et par les suites de Cauchy.

Au lycée, on est plutôt sur la première optique bien sûr en admettant l'une des propriétés caractéristiques de $\mathbb{R}$: toute suite croissante et majorée de nombres réels converge (qui est une conséquence immédiate du fait que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure, voir exercice plus bas).

Il y a aussi de nombreuses propriétés caractéristiques de $\mathbb{R}$ en termes de fonctions, notamment celles ci utilisées plus ou moins encore au lycée

- Si une fonction continue définie sur un intervalle prend sur cet intervalle une valeur négative et une valeur positive alors elle s'annule en au moins un point ;
- Toute fonction continue sur un segment (intervalle fermé borné) admet un maximum.

Il y a plein d'autres caractérisations dont nous ne parlons pas pour le moment.

2 Les corps totalement ordonnés archimédiens

Tous les corps sont supposés commutatifs.

Définition 2.1. On appelle corps totalement ordonné un quadruplet $(\mathbb{K}, +, ., \leq)$ tel que

- L'ordre sur $\mathbb{K}$ est total ;

- L'ordre de $\mathbb{K}$ est compatible avec les lois de $\mathbb{K}$, c'est-à-dire compatible avec l'addition et avec la multiplication par des éléments positifs (c'est-à-dire ≥ 0).

Dans un tel corps on pourra définir les notions de suite bornée, de suite de Cauchy, de suite convergente...

Définition 2.2. On dit que le corps totalement ordonné $(\mathbb{K}, +, ., \leq)$ est archimédien, si, pour tout $a \in \mathbb{K}$, on peut trouver un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > a$.

La définition est équivalente au fait que pour tout $\mathbb{K}$ et pour tout $b > 0$, on peut trouver un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $nb > a$.

On peut montrer que $\mathbb{R}$ est à isomorphisme près l'unique corps totalement ordonné archimédien et qui possède la propriété de la borne supérieur. On démontre de suite le petit résultat suivant qui ne met en jeu que les propriétés de $\mathbb{R}$ comme corps totalement ordonné archimédien.

Proposition 2.3. Si $\mathbb{K}$ est un corps totalement ordonné archimédien contenant $\mathbb{Q}$, alors
- entre deux éléments distincts de $\mathbb{K}$, il existe un élément de $\mathbb{Q}$;
- tout point de $\mathbb{K}$ est limite d'une suite de nombre rationnels.
Autrement dit $\mathbb{Q}$ est alors dense dans $\mathbb{K}$.

Démonstration 1. Pour le premier point, on considère deux éléments distincts a et b de $\mathbb{K}$. On peut supposer $b > a > 0$. Si a et b sont de signes contraires alors 0 convient. Si a et b sont négatifs, on considère leurs opposés. Puisque $\mathbb{K}$ est archimédien, on peut trouver un entier $n \in$ tel que $n > \dfrac{1}{b-a}$. On note r le rationnel $\dfrac{1}{n}$.On a $0 < r < b - a$. Puisque $\mathbb{K}$ est archimédien encore, on peut trouver $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > \dfrac{a}{r}$, c'est-à-dire $mr > a$. L'ensemble des $p \in \mathbb{N}$ tels que $pr \leq a$ est non vide car il contient 0 et il est majoré par m. Donc il possède un plus grand élément q. Il vient alors les inégalités :

$$qr \leq a < (q+1)r \leq a + r < b.$$

Donc le rationnel $(q+1)r$ convient.
De là, pour le deuxième point, partant d'un élément $a \in \mathbb{K}$, on peut trouver pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$ un nombre rationnel r_n tel que $a < r_n < a + \dfrac{1}{n}$. Pour tout $\epsilon > 0$, puisque $\mathbb{K}$ est archimédien, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$, on a $\frac{1}{n} \leq \epsilon$, c'est-à-dire $|a - r_n| < \epsilon$. Donc la suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.

On peut aussi montrer que $\mathbb{K} - \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{K}$.

3 Coupures de Dedekind et borne supérieure

Par opposition à l'algèbre qui traite des égalités, l'analyse consiste en la manipulation des inégalités, et la construction de Dedekind (1872) est principalement basée sur la relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$

L'irrationalité de $\sqrt{2}$ (voir plus haut), qui a longtemps intrigué les contemporains de Pythagore (6ème siècle avant J.C.), permet de montrer que l'ensemble :

$$A \,=\, \{\, x \in \mathbb{Q} / \, x \leq 0 \text{ ou } x^2 < 2 \,\}$$

est non vide et majoré, mais que l'ensemble de ses majorants :

$$(A) \,=\, \{\, y \in \mathbb{Q} / \, y \geq 0 \; y^2 \geq 2 \,\}$$

n'admet pas de plus petit élément, qui serait sinon par définition sa borne supérieure $\sup{(A)}$.

Pour résoudre ce problème, Dedekind a défini une *coupure* comme une partition de $\mathbb{Q}$ en deux parties (A, B) telles que :

- tout élément de A est (strictement) inférieur à tout élément de B
- la partie A n'admet pas de plus grand élément.

Ces coupures incluent en particulier les ensembles de la forme :

$$A_r = \{ x \in \mathbb{Q} / x < r \}$$

pour $r \in \mathbb{Q}$ qui s'identifient aux rationnels, mais il existe comme ci-dessus des coupures (A, B) telles que B n'a pas de plus petit élément : on définit $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des coupures, et on montre que c'est un corps totalement ordonné archimédien (avec les bonnes définitions, comme pour les constructions de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ comme quotients de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) qui possède en outre la *propriété de borne supérieure*, c'est à dire que toute partie **non vide** et **majorée** $A \subset \mathbb{R}$ admet une **borne supérieure** $\sup(A) \in \mathbb{R}$, qui est par définition son **plus petit majorant**.

Elle est donc caractérisée par :

- pour tout $x \in A$, on a : $x \leq M$
- pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $x \in A$ tel que : $x > M - \varepsilon$

puisque c'est le seul réel $M = \sup(A)$ possédant ces deux propriétés.

4 Suites de Cauchy et complétude

La **distance** d sur l'ensemble $E = \mathbb{Q}$ est définie par : $d(x, y) = |x - y|$ et elle permet de considérer E comme un *espace métrique*.

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E **converge** vers $\ell \in E$ si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tel que $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que :

$$n \geq N \quad \Longrightarrow \quad d(u_n, \ell) \leq \varepsilon \quad ,$$

et $(u_n)_{n \in}$ est une **suite de Cauchy** si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tel que $\varepsilon > 0$, il existe N tel que :

$$p \geq N \; q \geq N \quad \Longrightarrow \quad d(u_p, u_q) \leq \varepsilon \quad .$$

Ces notions seront développées dans le prochain chapitre : on montre aisément que toute suite convergente est une suite de Cauchy, mais la réciproque est fausse si $E = \mathbb{Q}$ donc $\mathbb{Q}$ n'est pas *complet*. Cauchy (1872) a défini $\mathbb{R}$ comme le quotient de l'ensemble des suites de Cauchy de rationnels par la relation d'équivalence :

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$$

et l'a muni d'une structure de corps ordonné, et de plus l'espace métrique $E = \mathbb{R}$ est **complet**, c'est à dire que toute suite de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{R}$ est convergente.

Exercice 7. On sait généralement démontrer qu'il n'existe pas de nombre rationnel r tel que $r^2 = 2$. Mais pouvez vous démontrer maintenant qu'il existe un nombre réel x tel que $x^2 = 2$?

5 Définition axiomatique de $\mathbb{R}$

On peut montrer que les deux constructions ci-dessus définissent le même corps des nombres réels. La première construction donne un corps totalement ordonné archimédien possédant la propriété de la borne supérieure, la deuxième donne un corps totalement ordonné archimédien complet. Mais $\mathbb{R}$ peut faire également l'objet d'une définition axiomatique déjà annoncée plus haut :

Définition 5.1. $\mathbb{R}$ est l'unique corps (à isomorphisme de corps et d'ensembles ordonnés près) totalement ordonné contenant $\mathbb{Q}$ et dans lequel toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure - ou dans lequel toute suite de Cauchy converge.

Exercice 8. Montrer que $\mathbb{R}$ construit par l'une des deux méthodes précédentes est *archimédien*.

6 D'autres propriétés caractéristiques de $\mathbb{R}$ en termes de suites

Théorème 6.1. Soit $(u_n)_{n\in}$ une suite croissante et majorée de nombres réels. Alors (u_n) converge et sa limite L vérifie :

$$L = \sup\{ u_n \ , \ n \in \mathbb{N} \} \quad .$$

Démonstration 2. Soit $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Cet ensemble est non vide et il est majoré dans $\mathbb{R}$ car la suite est elle même majorée. Donc A possède une borne supérieure L. On montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe $u_N \in A$ tel que $u_N > L - \epsilon$. Comme la suite est croissante, pour tout $n \geq N$, on a $u_n > L - \epsilon$, plus précisément $L - \epsilon < u_n < L$. Ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers L.

Théorème 6.2. Propriété des segments emboîtés. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments de $\mathbb{R}$ telle que : $I_{n+1} \subset I_n$ pour tout $n \in$ et la longueur de I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Alors l'ensemble :

$$\bigcap_{n\in} I_n$$

est un singleton.

Démonstration 3. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = [a_n, b_n]$ avec $a_n < b_n$.
Toujours avec la propriété de la borne supérieure, on considère $c = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $c \leq b_n$. Donc $c \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$.
Soit c' un autre élément de cette intersection. Si $c \neq c'$, par exemple $c' > c$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $b_n - a_n > c' - c$, ce qui contredit l'hypothèse que $b_n - a_n$ tend vers 0. Donc $c' = c$.

Exercice 9. Comment ce théorème se traduit-il en termes de suites ?

A partir de l'un ou l'autre de ces résultats, on peut retrouver les deux propriétés équivalentes suivantes de $\mathbb{R}$ (voir bas de la page 3) :
- $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne supérieure ;
- toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ est convergente dans $\mathbb{R}$.

En supposant seulement que $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné archimédien, un très bon exercice serait de montrer l'équivalence des 4 propriétés caractéristiques de $\mathbb{R}$ que nous avons rencontré jusqu'à présent.

Exercice 10. En étudiant les programmes du lycée, mettre en évidence les résultats du cours d'analyse concernant les suites numériques et qui sont démontrés ou admis aux différents niveaux d'enseignement.
Lorsque les résultats sont démontrés, produire les démonstrations correspondantes aux niveaux d'enseignement.
A partir du document distribué, comparez les différentes démonstrations proposées par les manuels et proposez celle que vous adopteriez.

7 Exercices sur les suites

Dans chacun des exercices, dans l'idéal, on étudiera le comportement des suites proposées - on pourra commencer par une observation expérimentale de ce comportement - et on s'interrogera sur l'intérêt de proposer ces suites à des élèves, les adaptions à faire, les énoncés à rédiger compte tenu des programmes d'enseignement. Selon les cas, l'entier n est supérieur strict ou non à 0.

Exercice 11. introduction aux suites numériques
Déterminer des suites numériques dont les premiers termes sont

1. $1 - 3 - 6 - 10 \cdots$ nombres triangulaires
2. $1 - 3 - 9 - 27 \cdots$
3. $0 - 1 - 3 - 7 \cdots$
4. $1 - 2 - 6 - 24 \cdots$
5. $2 - 3 - 5 - 7 \cdots$

Voir si vous pouvez étudier le comportement des suites que vous proposez.

Exercice 12. Des erreurs typiques d'élèves

1. $U_n = n + 4\sin(n)$
2. $V_n = (-1)^n$
3. $W_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
4. $T_n = \dfrac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n}$
5. $S_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
6. $A_n = 2013$
7. $B_n = \dfrac{n}{n^2 - 100n + 4}$
8. $C_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}$
9. $D_n = 1 + \dfrac{1}{1 + D_{n-1}} \quad D_0 = 1$